דיסקרטית - שיעור 1:

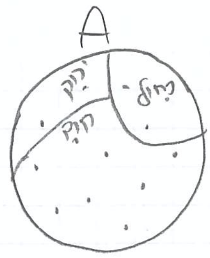
יחס שקילות:

יחס בינארי שמוכל ב-$A \times A$ שהוא:

- * טרנזיטיבי
- * סימטרי
- * רפלקסיבי

דוגמא:

$R = \{(x,y) \mid$ ל-x יש צבע עיניים כמו ל-y $\}$



$S \subseteq P(A)$ חלוקה של A.

$S = \{S_1, S_2, \dots\}$

לכל i,j

$S_i \cap S_j = \emptyset$

$\bigcup S_i = A$ ← איחוד של כולם.

$\forall_i S_i \neq \emptyset$

$S = \{S_1, S_2, S_3\}$

$S_1 =$ [כחול]

$S_2 =$ [חום]

$S_3 =$ [ירוק]

דוגמא 2:

$A = \mathbb{N}$ modulo

$R = \{(n,m) \mid n(\%3) = m(\%3)\}$

מ"ש

$[9] = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$

$[7] = \{3k+1 \mid k \in \mathbb{N}$

$[11] = \{3k+2 \mid k \in \mathbb{N}$

דוגמא 3:

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$S=\{\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5,6\}\}$

$R=\{(1,2),(2,1),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),$
$(5,5),(6,6),(5,6),(6,5)\}.$

ככה יוצרים יחס שקילות!

הגדרה:

תהי S חלוקה של A.

$S=\{S_1,S_2,\dots\}$

נגדיר את היחס המושרה (הנקבע) ע"י S, נסמן R_s, באופן הבא:

$R_s=\{(x,y) \mid$ x ו-y באותה מחלקה S_i ב-$S\}$

טענה:

תהי S חלוקה של A ויהי R_s היחס המושרה ע"י S.
אזי R_s הוא יחס שקילות.

הוכחה:

1. צ"ל R_s רפלקסיבי.

צ"ל לכל $x\in A$, $(x,x)\in R_s$. יהי $x\in A$ כלשהו.
כיוון ש-S חלוקה של A, קיים $S_i\in S$ כך ש- $x\in S_i$.
x ו-x נמצאים ב-S_i $\xLeftarrow{\text{הגדרה } R_s}$ $(x,x)\in R_s$.

2. צ"ל R_s סימטרי

נניח $(x,y)\in R_s$

צ"ל (x,y) $\Longleftarrow$ x ו-y באותה מחלקה
$\Longleftarrow$ y ו-x באותה מחלקה
$\Longleftarrow$ $(y,x)\in R_s$

... R_s טרנזיטיבי.

נניח $(x,y)\in R_s$ וגם $(y,z)\in R_s$

צ"ל $(x,z)\in R_s$

$(x,y)\in R_s \leftarrow$ x ו- y באותה מחלקה

$(y,z)\in R_s \leftarrow$ y ו- z באותה מחלקה

כיוון ש- y נמצא אך ורק במחלקה אחת (כי S חלוקה)

$\leftarrow$ x, y ו- z באותה מחלקה

$\leftarrow$ x ו- z באותה מחלקה

$\leftarrow (x,z)\in R_s$

הגדרה:

יהי R יחס שקילות על A. ויהי $a\in A$. נגדיר את קבוצה של A, נסמנה $[a]_R$ ונקרא לה המחלקה של a (מחלקת השקילות של a) באופן הבא:

$$[a]_R=\{x\in A \mid (x,a)\in R\}\subseteq A$$

יחס שקילות:
$(x,y)\in R$
$x\equiv_R y$

ונגדיר:

$$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$$

דוגמא קודמת:
$\mathbb{N}/R=\{[0],[1],[2],[3],[4],...\}$
$=\{[0],[1],[2]\}$

טענה:

יהי R יחס שקילות על A
אזי A/R היא חלוקה של A.

הוכחה:

לכל $a\in A$, $(a,a)\in R$ כי R רפלקסיבי.

$\Longleftarrow$ $a\in[a]_R$ ולכן $[a]_R\neq\emptyset$.

כיוון ש- $a\in[a]_R$ לכל a, אזי $A=\bigcup_{a\in A}[a]_R$.

איחוד של כולם.

יהיו $a,b \in A$ כלשהם.

צ"ל $[a]_R = [b]_R$ או $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

דיסקרטית - שיעור 2:

$$A/_R = \{[a]_R \mid a\in A\}$$

יהיו: $a,b\in A$

צ"ל: $[a]_R\cap[b]_R=\emptyset \Longleftarrow [a]_R\neq[b]_R$

צ"ל: $[a]_R=[b]_R \Longleftarrow [a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset$

נתון: $[a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset$

צ"ל: $[a]_R=[b]_R$

א. $[a]_R\subseteq[b]_R$

יהי $c\in[a]_R$

צ"ל $c\in[b]_R$

$\boxed{(c,a)\in R} \Longleftarrow c\in[a]_R$

$z\in[b]_R$ וגם $z\in[a]_R$, קיים z $\Longleftarrow [a]_R\cap[b]_R\neq\emptyset$

$(a,z)\in R \xLeftarrow{\text{סימטרי}} (z,a)\in R \Longleftarrow z\in[a]_R$

$(z,b)\in R \Longleftarrow z\in[b]_R$

טרנזיטיבי

$\boxed{(a,b)\in R}$

$c\in[b]_R \Longleftarrow (c,b)\in R \Longleftarrow (c,a)\in R\wedge(a,b)\in R$

ב. באופן דומה לסעיף א'.

יחס סדר חלקי:

יחס שמקיים:

* יחס אנטי-סימטרי
* יחס רפלקסיבי
* יחס טרנזיטיבי

חלקי:

דוגמא:

x מחלק את y ← $\frac{x}{y}$ בלי שארית.

מלא:

לכל (x,y) או (y,x) קיים ביחס.

דוגמא:

קטן שווה:

אפשר בין כל 2 מספרים להגיד מי מהם קטן יותר או אם הם שווים.

"מחלק את" אי אפשר להגיד את כל הזוגות בעולם:

דוגמא:

$(2,3) \leftarrow$ 2 לא מחלק את 3 וגם 3 לא מחלק את 2.

יחס סדר

<u>הגדרה</u>: יהי R יחס על הקבוצה A.

R נקרא ***יחס סדר חלקי*** על A אם R רפלקסיבי, אנטי סימטרי וטרנזיטיבי.

<u>הגדרה</u>: יהי R יחס על הקבוצה A.

R נקרא ***יחס סדר מלא*** על A אם R יחס סדר חלקי על A ומתקיים:
לכל x ו-y ב-A $(x,y)\in R$ או $(y,x)\in R$.

<u>דוגמאות</u>: הראה שכל אחד מהיחסים הבאים הוא יחס סדר חלקי:

1. $A=\Re$, $R_1=\{(x,y)|\ x\leq y\}$
2. $A=P(\{1,2\})$, $R_2=\{S,T)|\ S\subseteq T\}$
3. $A=$ כל המילים בעברית. $R_3=\{(w,u)|$ w תת מילה של u $\}$

<u>הגדרה</u>: יהי R יחס סדר חלקי על קבוצה A.

תהי $B\subseteq A$ ויהי $b\in B$.

b יקרא "איבר קטן ביותר" ב- B אם לכל $x\in B$ $(b,x)\in R$.

b יקרא "מינימלי" ב- B אם לא קיים $x\in B$ כך ש- $x\neq b$ ו- $(x,b)\in R$.

<u>דוגמאות</u>: נתיחס לדוגמא 3 למעלה.

תהי $B=\{$ברד,נברא,דבר,בר$\}$
תהי $C=\{$מדברים, ברד,נברא,דב,בר$\}$

המשך של דוגמא 3 למעלה.

לכל אחת מהקבוצות C,B האם יש בה איבר קטן ביותר? מיהו?
האם יש בה איבר מינימלי? מיהו?

<u>הערה</u>: b מינימלי ~~אם~~ אמ"ם לכל $x\in B$, $x=b$ או $(x,b)\notin R$.

<u>טענה</u>: יהי R יחס סדר חלקי על קבוצה A ותהי $B\subseteq A$.

<u>1.</u> אם B מכיל איבר קטן ביותר אז הוא יחיד.

<u>2.</u> יהי b האיבר הקטן ביותר ב- B, אז b גם מינימלי ב- B, והוא האיבר המינימלי היחיד.

<u>3.</u> אם R יחס סדר מלא על A, ו- b איבר מינימלי ב- B, אזי b הוא האיבר הקטן ביותר ב-B.

פונקציות (חלקיות)

הגדרה: תהיינה A,B שתי קבוצות. יחס $f \subseteq A \times B$ נקרא **פונקציה חלקית** מ-A ל-B, אם לכל $a \in A$ קיים לכל היותר $b \in B$ **אחד** כך ש- $(a,b) \in f$. במקרה זה נוהגים לסמן $f:A \to B$.

אם $(a,b) \in f$ נסמן זאת על ידי $f(a)=b$ ונאמר ש– b הוא התמונה של a, וכך ש-a הוא המקור של b.

הקבוצה A נקראת **התחום** של הפונקציה f. (Domain)

הקבוצה B נקראת **הטווח** של הפונקציה f. (Range)

קבוצת כל האיברים ב- B שהם תמונה של איבר כלשהו ב-A נקראת **התמונה** של f ונסמנה $f(A)$.

אם **לכל** $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש- $(a,b) \in f$ נאמר ש-f **פונקציה שלמה**.

אם **קיים** $a \in A$ כך שלא קיים $b \in B$ כך ש-$(a,b) \in f$ נאמר ש-f לא מוגדרת עבור a.

ואם **קיים** $a \in A$ כך ש-f לא מוגדרת עבורו נאמר ש-f פונקציה **חלקית ממש**.

שימו לב, שעל פי ההגדרה של פונקציה לכל איבר בתחום יש לכל היותר תמונה אחת בטווח, אולם בהחלט ייתכן שלאיבר בטווח יהיו כמה מקורות בתחום.

דוגמאות:

1. תהינה $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,2,3\}$

$F = \{ (a,2),(b,3),(c,2),(d,1) \}$

$F:A \to B$

$F(a)=2,\ F(b)=3,\ F(c)=2,\ F(d)=1$

לא חד ערכי

$G = \{ (a,2),(\underline{\underline{b}},3),(c,2),(d,1), (\underline{\underline{b}},1) \}$ G אינה פונקציה חלקית

$H = \{ (a,2),(b,3),(d,1) \}$ H פונקציה חלקית ממש

2. $f =\{ (x,y) \mid y = x^2 \ , \ x,y \in R \}$, צורת כתיבה מקובלת לפונקציה f:

חד ערכית

$f: R \to R$

$f(x) = x^2$

3. האם היחס הבא הוא פונקציה חלקית:

$h =\{ (x,y) \mid xy = x^3 \ , \ x,y \in R \}$ ← לא חד ערכי

4. האם היחס הבא הוא פונקציה חלקית:

$g =\{ (\{x,y\},(x,y)) \mid x,y \in R \}$ ← לא חד ערכי

אין חשיבות לסדר

פונקציות שלמות מיוחדות

- תהי A קבוצה כלשהי. הפונקציה השלמה $I_A:A \to A$ המוגדרת על ידי $I_A(x)=x$ לכל $x \in A$, נקראת ***פונקצית הזהות*** על A. (בד"כ נסמן בקיצור I)

- תהי A קבוצה כלשהי, ותהי $C \subseteq A$. נגדיר פונקציה שלמה $f_C:A \to \{0,1\}$ על ידי:

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

הפונקציה השלמה f_C נקראת הפונקציה האופיינית (או הפונקציה המציינת) של הקבוצה C.

- פונקציה שלמה f אשר הטווח שלה כולל רק שני ערכים נקראת פונקציה בוליאנית.

הערה: מעכשיו נדבר רק על פונקציות שלמות, ולכן אם f פונקציה שלמה, נאמר בקיצור f פונקציה.

תכונות של פונקציות

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות, ותהי $f:A\to B$ פונקציה.

- הפונקציה f היא **על** אם $f(A)=B$ (הטווח של A הוא כל הקבוצה B), כלומר לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.
- הפונקציה f היא ***חד-חד ערכית*** (חח"ע או 1:1), אם לכל שני איברים שונים $a_1,a_2\in A$ מתקיים $f(a_1)\neq f(a_2)$.

הערה: ההגדרה הנ"ל של פונקציה חח"ע שקולה להגדרה האומרת ש-f חח"ע אם $f(a_1)=f(a_2)$ גורר בהכרח ש- $a_1=a_2$. ההגדרה החלופית נוחה כדי להוכיח שפונקציה מסוימת היא אכן חח"ע.

דוגמאות:

- קבע לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא חח"ע או על.
  - $f:Z\to Z$, $f(x)=x+1$
  - $f:Z\to Z$, $f(x)=x^2$
  - $f:Z\to Z$, $f(x)=2x$
- תנו דוגמא לפונקציה $f:N\to N$ כך ש:
  - f חח"ע ואינה על.
  - f על ואינה חח"ע.

פעולות על פונקציות

הגדרה: תהיינה A,B,C קבוצות ותהיינה $f:A\to B$,$g:B\to C$ פונקציות. ***ההרכבה*** של g ו- f היא הפונקציה $h:A\to C$ המוגדרת על ידי $h(a)=g(f(a))$ לכל $a\in A$.
סימון: $h=g^\circ f$.

דוגמא:

- תהיינה $f,g:N\to N$ פונקציות המוגדרות על ידי $g(x)=2x+5$, $f(x)=4x+3$. מהן $g\circ f$ ו- $f\circ g$.

מסקנה מהדוגמא: פעולת ההרכבה אינה חילופית.

- תהי X קבוצת כל בני האדם. תהי $f:X\to X$ הפונקציה המוגדרת על ידי "$f(x)=$"אביו של x", ותהי הפונקציה $g:X\to N$ מוגדרת על ידי "$g(x)=$"מספר הטלפון של x". מהי $g\circ f$.

<u>תכונה:</u> פעולת ההרכבה אסוציטבית, כלומר: $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

<u>הערה:</u> לכל $f:A\to B$ מתקיים $f\circ I_A = f$, $I_B\circ f = f$.

<u>הגדרה:</u> תהי $f:A\to A$

$$f^0 = I_A$$
$$f^k = f^{k-1}\circ f$$

<u>טענה 1:</u> תהיינה $f:A\to B,\ g:B\to C$, אזי

1. אם f ו- g חח"ע אזי $g\circ f$ חח"ע.
2. אם f ו- g על אזי $g\circ f$ על.

<u>שאלה:</u> האם היחס ההופכי של פונקציה הוא בהכרח פונקציה?

<u>טענה</u> 2: אם $f:A\to B$ חח"ע ועל אז $f^{-1}:B\to A$.

<u>הערה:</u> אם $f:A\to B$ חח"ע ועל נאמר ש- f פונקציה הפיכה,
ונקרא ל- f^{-1} הפונקציה ההופכית של-f.

<u>דוגמא:</u> תהי $f:N^+\to N$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(n)=n-1$.
הפונקציה f הפיכה, מהי f^{-1}?

<u>טענה</u> 3: אם $f:A\to B$ ו- $f^{-1}:B\to A$ אזי $f^{-1}\circ f = I_A$ ו- $f\circ f^{-1} = I_B$.

<u>טענה</u> 4: תהי $f:A\to B$

1. אם קיימת $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f = I_A$ אזי f חח"ע.
2. אם קיימת $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g = I_B$ אזי f על.

משפט 1: תהי $f:A\to B$ הטענות הבאות שקולות זו לזו.

1. f היא חח"ע ועל.
2. $f^{-1}:B\to A$
3. קיימת $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f=I_A$ ו- $f\circ g=I_B$

דוגמא:

$g:R\to R$ $f:R\to R$

$g(x)=5x-7$ $f(x)=\dfrac{x+7}{5}$

משפט 2: תהי $f:A\to B$ ותהי $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f=I_A$, $f\circ g=I_B$,
אזי $g=f^{-1}$

דוגמאות:

1. $f(x):R-\{0\}\to R-\{2\}$ $f(x)=\dfrac{1}{x}+2$

   מהי f^{-1}

2. תהיינה $f,g:Z\to Z$ פונקציות המוגדרות על ידי $f(x)=g(x)=-x$.

   חשב את $f\circ g$ ואת $g\circ f$.

משפט: יהיו $f:A\to B$, $g:B\to C$ שתי פונקציות שלמות חח"ע ועל,
אזי $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

פונקציות

הגדרה: תהיינה A,B שתי קבוצות. יחס $f \subseteq A \times B$ נקרא **פונקציה חלקית** מ-A ל-B, אם לכל $a \in A$ קיים לכל היותר **אחד** $b \in B$ כך ש- $(a,b) \in f$. במקרה זה נוהגים לסמן $f: A \to B$.

אם $(a,b) \in f$ נסמן זאת על ידי $f(a)=b$ ונאמר ש– b הוא התמונה של a, וכך ש-a הוא המקור של b.

הקבוצה A נקראת **התחום** של הפונקציה f. (Domain)

הקבוצה B נקראת **הטווח** של הפונקציה f. (Range)

קבוצת כל האיברים ב- B שהם תמונה של איבר כלשהו ב-A נקראת **התמונה** של f ונסמנה $f(A)$.

אם **לכל** $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש- $(a,b) \in f$ נאמר ש-f **פונקציה שלמה**.

אם **קיים** $a \in A$ כך שלא קיים $b \in B$ כך ש-$(a,b) \in f$ נאמר ש-f לא מוגדרת עבור a.

ואם **קיים** $a \in A$ כך ש-f לא מוגדרת עבורו נאמר ש-f פונקציה **חלקית ממש**.

שימו לב, שעל פי ההגדרה של פונקציה לכל איבר בתחום יש לכל היותר תמונה אחת בטווח, אולם בהחלט ייתכן שלאיבר בטווח יהיו כמה מקורות בתחום.

דוגמאות:

1. תהינה $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{1,2,3\}$

$F = \{ (a,2),(b,3),(c,2),(d,1) \}$

$F: A \to B$

$F(a)=2,\ F(b)=3,\ F(c)=2,\ F(d)=1$

$G = \{ (a,2),(b,3),(c,2),(d,1), (b,1) \}$ G אינה פונקציה חלקית

$H = \{ (a,2),(b,3),(d,1) \}$ H פונקציה חלקית ממש

2. $f = \{ (x,y) \mid y = x^2 ,\ x,y \in R \}$, צורת כתיבה מקובלת לפונקציה f:

$$f: R \to R$$
$$f(x) = x^2$$

3. האם היחס הבא הוא פונקציה חלקית:

$$h = \{ (x,y) \mid xy = x^3 ,\ x,y \in R \}$$

4. האם היחס הבא הוא פונקציה חלקית:

$$g = \{ (\{x,y\},(x,y)) \mid x,y \in R \}$$

<u>פונקציות שלמות מיוחדות</u>

- תהי A קבוצה כלשהי. הפונקציה השלמה $I_A: A \to A$ המוגדרת על ידי $I_A(x)=x$ לכל $x \in A$, נקראת ***פונקצית הזהות*** על A. (בד"כ נסמן בקיצור I)

- תהי A קבוצה כלשהי, ותהי $C \subseteq A$. נגדיר פונקציה שלמה $f_C: A \to \{0,1\}$ על ידי:

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & x \in C \\ 0 & x \notin C \end{cases}$$

הפונקציה השלמה f_C נקראת הפונקציה האופיינית (או הפונקציה המציינת) של הקבוצה C.

- פונקציה שלמה f אשר הטווח שלה כולל רק שני ערכים נקראת פונקציה בוליאנית.

הערה: מעכשיו נדבר רק על פונקציות שלמות, ולכן אם f פונקציה שלמה, נאמר בקיצור f פונקציה.

תכונות של פונקציות

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות, ותהי $f:A\to B$ פונקציה.

- הפונקציה f היא **על** אם $f(A)=B$ (הטווח של A הוא כל הקבוצה B), כלומר לכל $b\in B$ קיים $a\in A$ כך ש- $f(a)=b$.
- הפונקציה f היא ***חד-חד ערכית*** (חח"ע או 1:1), אם לכל שני איברים שונים $a_1,a_2\in A$ מתקיים $f(a_1)\neq f(a_2)$.

הערה: ההגדרה הנ"ל של פונקציה חח"ע שקולה להגדרה האומרת ש-f חח"ע אם $f(a_1)=f(a_2)$ גורר בהכרח ש- $a_1=a_2$. ההגדרה החלופית נוחה כדי להוכיח שפונקציה מסוימת היא אכן חח"ע.

דוגמאות:

- קבע לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות אם היא חח"ע או על.
  - $f:Z\to Z\ ,\ f(x)=x+1$
  - $f:Z\to Z\ ,\ f(x)=x^2$
  - $f:Z\to Z\ ,\ f(x)=2x$
- תנו דוגמא לפונקציה $f:N\to N$ כך ש:
  - f חח"ע ואינה על.
  - f על ואינה חח"ע.

פעולות על פונקציות

הגדרה: תהיינה A,B,C קבוצות ותהיינה $f:A\to B$,$g:B\to C$ פונקציות. ***ההרכבה*** של g ו- f היא הפונקציה $h:A\to C$ המוגדרת על ידי $h(a)=g(f(a))$ לכל $a\in A$.
סימון: $h=g^\circ f$.

דוגמא:

- תהיינה $f,g:N\to N$ פונקציות המוגדרות על ידי $g(x)=2x+5$, $f(x)=4x+3$. מהן $g\circ f$ ו- $f\circ g$.

מסקנה מהדוגמא: פעולת ההרכבה אינה חילופית.

- תהי X קבוצת כל בני האדם. תהי $f:X\to X$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x)=$"אביו של x", ותהי הפונקציה $g:X\to N$ מוגדרת על ידי "מספר הטלפון של x"$=g(x)$. מהי $g\circ f$.

<u>תכונה:</u> פעולת ההרכבה אסוציטבית, כלומר: $(f\circ g)\circ h = f\circ(g\circ h)$

<u>הערה:</u> לכל $f:A\to B$ מתקיים $f\circ I_A = f$, $I_B\circ f = f$.

<u>הגדרה:</u> תהי $f:A\to A$

$$f^0 = I_A$$
$$f^k = f^{k-1}\circ f$$

<u>טענה 1:</u> תהיינה $f:A\to B,\ g:B\to C$, אזי
1. אם f ו- g חח"ע אזי $g\circ f$ חח"ע.
2. אם f ו- g על אזי $g\circ f$ על.

<u>שאלה:</u> האם היחס ההופכי של פונקציה הוא בהכרח פונקציה?

<u>טענה 2:</u> אם $f:A\to B$ חח"ע ועל אז $f^{-1}:B\to A$.

<u>הערה:</u> אם $f:A\to B$ חח"ע ועל נאמר ש- f פונקציה הפיכה, ונקרא ל- f^{-1} הפונקציה ההופכית של-f.

<u>דוגמא:</u> תהי $f:N^+\to N$ פונקציה המוגדרת על ידי $f(n)=n-1$.
הפונקציה f הפיכה, מהי f^{-1}?

<u>טענה 3:</u> אם $f:A\to B$ ו- $f^{-1}:B\to A$ אזי $f^{-1}\circ f = I_A$ ו- $f\circ f^{-1} = I_B$.

<u>טענה 4:</u> תהי $f:A\to B$
1. אם קיימת $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f= I_A$ אזי f חח"ע.
2. אם קיימת $g:B\to A$ כך ש- $f\circ g= I_B$ אזי f על.

<u>משפט 1</u>: תהי $f:A\to B$ הטענות הבאות שקולות זו לזו.

1. f היא חח"ע ועל.
2. $f^{-1}:B\to A$
3. קיימת $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f=I_A$ ו- $f\circ g=I_B$

<u>דוגמא:</u>

$g:R\to R$ $\quad$ $f:R\to R$

$$g(x)=5x-7 \qquad f(x)=\frac{x+7}{5}$$

<u>משפט 2</u>: תהי $f:A\to B$ ותהי $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f=I_A$, $f\circ g=I_B$,
אזי $g=f^{-1}$

דוגמאות:

1. $f(x):R-\{0\}\to R-\{2\}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x}+2$

מהי f^{-1}

2. תהיינה $f,g:Z\to Z$ פונקציות המוגדרות על ידי $f(x)=g(x)=-x$.
חשב את $f\circ g$ ואת $g\circ f$.

<u>משפט:</u> יהיו $g:B\to C$, $f:A\to B$ שתי פונקציות שלמות חח"ע ועל,
אזי $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

דיסקרטית - שיעור 3:

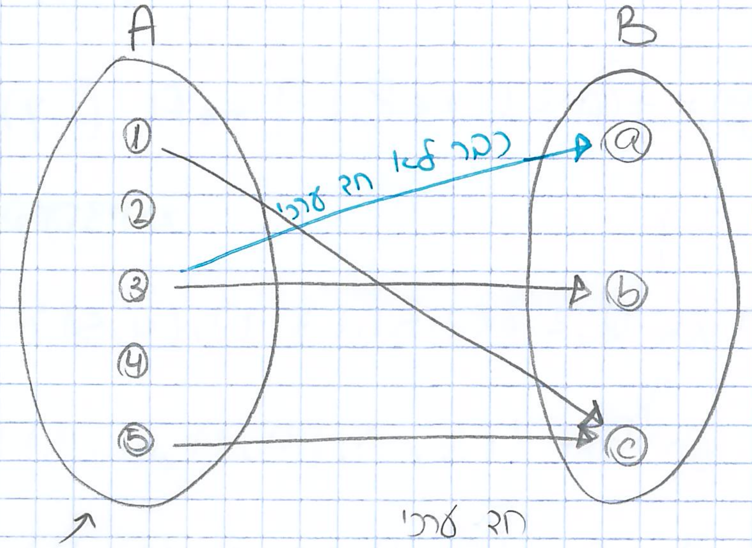
פונקציות:

יחס חד ערכי: נקרא פונקציה.

יהי $R \subseteq A \times B$

הגדרה:

R יקרא חד ערכי אם לכל $x \in A$ קיים לכל היותר $y \in B$ אחד כך ש- $(x,y) \in R$.



חד ערכי רק אם יש חץ אחד יוצא.
אם לזה חץ נכנס אז ממש לא משנה כמה אומרים.

הגדרה:

R יקרא שלם אם לכל $x \in A$ קיים $y \in B$ כך ש-: $(x,y) \in R$

הגדרה:

יהי $R \subseteq A \times B$

אם R יחס חד ערכי (נאמר ש- R פונקציה חלקית.

אם R יחס חד ערכי וגם שלם (נאמר ש- R פונקציה שלמה (בקיצור נאמר פונקציה).

אם R פונקציה חלקית ולא שלמה (נאמר ש- R פונקציה חלקית ממש.

נסמן בד"כ במקום R, f.

ובמקום $(x,y) \in f$ (נרשום: $f(x)=y$

$$f: A \longrightarrow B$$

ל-A קוראים תחום

ל-B קוראים טווח

$$f(x)=y$$

$x\in A$ אומר ש-y הוא התמונה של x

$y\in B$ אומר ש-x הוא המקור של y

התמונה של פונקציה f היא:

$$R(f)=f(A)=\{y\in B \mid \exists x\in A \ \ (x,y)\in R\}$$

פעולות על פונקציות:

f = ח"ע $R_1=\{(2,5),(3,1),(4,5)\}$

g = ח"ע $R_2=\{(5,1),(4,1),(1,3)\}$

ח"ע $R_1\circ R_2=\{(2,1),(3,3),(4,1)\}$

טענה:

יהיו R_1 ו- R_2 יחסים חד ערכיים אזי $R_1\circ R_2$ יחס חד ערכי

דיסקרטית - שיעור 4:

תזכורת:

תהינה g, f פונקציות $f: A \to B$, $g: B \to C$ ההרכבה

$g \circ f$ פונקציה $g \circ f: A \to C$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$h(x) = g(f(x))$$

הרכבה:

$(f \circ g) \circ h$ $\quad$ $h: A \to B$

$f \circ (g \circ h)$ $\quad$ $g: B \to C$

$f: C \to D$

(נמצא תחום וטווח:

$h: A \to B$

$f \circ g: B \to D$

$(f \circ g) \circ h: A \to D$

$g \circ h: A \to C$

$f: C \to D$

$f \circ (g \circ h): A \to D$

יהי $x \in A$ כלשהו:

$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x))$$
$$= f(g(h(x)))$$
$$= f((g \circ h)(x))$$
$$= (f \circ (g \circ h))(x)$$

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ פעמים}} \qquad f^0 = I_A$$

רק:
$f: A \to A$

דוגמא:

$$f = \{(1,2),(3,2),(2,1)\}$$

$A = \{1,2,3\}$

$$f^{-1} = \{(2,1),(2,3),(1,2)\}$$

לא פונקציה, כי לא יחס חד ערכי

חח"ע:

$$a_1, a_2 \in A$$

$$a_1 \neq a_2 \Longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

$$\equiv f(a_1) = f(a_2) \Longrightarrow a_1 = a_2$$

$\Longleftarrow$
נובע מזה שזה
פונקציה.

1.

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$

$$f(x)=x^2$$

לא על

$-2\in\mathbb{Z}$ עבורו לא קיים $x\in\mathbb{Z}$

כך ש- $x^2=-2$

$-2,2\in\mathbb{Z}$

$$f(-2)=4$$
$$f(4)=4$$

2.

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$$

f על:

הוכחה:

יהי $y\in\mathbb{Z}$

צ"ל: קיים $x\in\mathbb{Z}$ כך ש- $f(x)=y$

$y-1\in\mathbb{Z}$

$$f(y-1)=y$$

ניקח $x=y-1$

$y-1\in\mathbb{Z}$ (כי $y\in\mathbb{Z}$)

f חח"ע:

צ"ל: $f(x_1)=f(x_2)\to x_1=x_2$

נניח $f(x_1)=f(x_2)$

צ"ל: $x_1=x_2$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1)=x_1+1 \\ f(x_2)=x_2+1 \end{array}\right\} x_1+1=x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2$$

3.

הערה:

אם $f: A \to B$ פונ' (שלמה) וחח"ע אזי היחס f^{-1} היא פונקציה חלקית.

הוכחת טענה 1:

נתונה $f: A \to B$, $g: B \to C$

1. נתון: f חח"ע

g חח"ע

צ"ל: $g \circ f$ חח"ע.

יהיו $x_1, x_2 \in A$

צ"ל: $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Longrightarrow x_1 = x_2$

נניח $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

צ"ל: $x_1 = x_2$

$$(g \circ f)(x_1) = g(f(x_1))$$

$$(g \circ f)(x_2) = g(f(x_2))$$

לפי ההנחה:

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$\Downarrow \text{ g חח"ע}$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Downarrow \text{ f חח"ע}$$

$$x_1 = x_2$$

2. נתון: f על

נתון: g על

צ"ל: $g\circ f$ על

יהי $z\in C$

צ"ל: קיים $x\in A$ כך ש- $(g\circ f)(x)=z$

כיוון ש- $g:B\to C$ על קיים $y_0\in B$ כך ש- $g(y_0)=z$

$y_0\in B$

$\boxed{z\in C\text{ , }C\text{ הוא טווח של }g}$

B טווח של f. f על $f:A\to B$

לכן קיים $x_0\in A$ כך ש- $f(x_0)=y_0$

ניקח $x=x_0$

$$(g\circ f)(x_0)=g(f(x_0))$$
$$=g(y_0)$$
$$=z$$

$(x_0\in A)$

דיסקרטית - שיעור 5:

הוכחת טענה 2:

יהי $f: A \to B$ פונקציה חח"ע ועל

צ"ל: $f^{-1}: B \to A$ פונקציה

כלומר צ"ל לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ יחיד כך ש- $(y,x) \in f^{-1}$

$(f^{-1}(y) = x)$

א) צ"ל לכל $y \in B$ קיים $x \in A$ כך ש- $(y,x) \in f^{-1}$.

יהי $y \in B$ כלשהו. $f: A \to B$ על.

קיים $x_0 \in A$ כך ש- $f(x_0) = y \Rightarrow (x_0, y) \in f \Rightarrow (y, x_0) \in f^{-1}$

$x_0 \in A$ מ.ש.ל.

ב) צ"ל: קיים "יחיד"

נניח $x_1, x_2 \in A$ כך ש- $f^{-1}(y) = x_1$, $f^{-1}(y) = x_2$

צ"ל: $x_1 = x_2$.

$f^{-1}(y) = x_1 \Rightarrow (y, x_1) \in f^{-1} \Rightarrow (x_1, y) \in f \Rightarrow f(x_1) = y$

$f^{-1}(y) = x_2 \Rightarrow (y, x_2) \in f^{-1} \Rightarrow (x_2, y) \in f \Rightarrow f(x_2) = y$

$$\underset{y}{f(x_1)} = \underset{y}{f(x_2)}$$

f חח"ע $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$ מ.ש.ל.

הוכחת טענה 3:

תהינה $f: A \to B$

$f^{-1}: B \to A$

צ"ל: א. $f^{-1} \circ f = I_A$

ב. $f \circ f^{-1} = I_B$

א. יהי $x \in A$ כלשהו.

קיים $y \in B$ יחיד כך ש- $f(x) = y \Rightarrow (x,y) \in f \Rightarrow (y,x) \in f^{-1}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(y)=x$$

$$f^{-1}\circ f=I_A$$

ב. מוכיחים באופן דומה.

דוגמא לטענה מס' 3:

$$f: N^{+}\longrightarrow N$$
$$f(x)=x-1$$

$$f^{-1}: N\longrightarrow N^{+}$$
$$f^{-1}(x)=x+1$$

$$f^{-1}\circ f: N\longrightarrow N$$
$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}(f(x))=f^{-1}(x-1)=(x-1)+1$$
$$=x$$

$$f\circ f^{-1}: N^{+}\longrightarrow N^{+}$$
$$(f\circ f^{-1})(x)=\dots$$

טענה 4:

יהי $f: A\to B$

1. אם קיימת $g_1: B\to A$ כך ש- $g_1\circ f=I_A$ אז f חח"ע.
2. אם קיימת $g_2: B\to A$ כך ש- $f\circ g_2=I_B$ אזי f על.

הוכחה:

תהי $f: A \to B$

1. תהי $g_1: B \to A$ כך ש- $g_1 \circ f = I_A$

צ"ל: f חח"ע.

נניח $f(x_1) = f(x_2)$

צ"ל: $x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\begin{array}{ccc} g(f(x_1)) & = & g(f(x_2)) \\ \| & & \| \\ (g \circ f)(x_1) & & (g \circ f)(x_2) \\ \| & & \| \\ I_A(x_1) & & I_A(x_2) \\ \| & & \| \\ x_1 & & x_2 \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$x_1 = x_2$ מ.ש.ל.

2. תהי $g_2: B \to A$ כך ש- $f \circ g_2 = I_B$

צ"ל: f על.

יהי $y \in B$ כלשהו

צ"ל: קיים $x \in A$ כך ש- $f(x) = y$.

(נראה ש- $g_2(y)$ הוא מקור של y.

$\underbrace{g_2(y)}_{x_0} \in A$ (כי $g_2: B \to A$)

$$f(g_2(y)) = (f \circ g_2)(y) =$$

$$\underset{(א)}{=} I_B(y) = y$$

מ.ש.ל.

משפט:

יהי $f: A \to B$ כיון לכל טענות יש $\longleftrightarrow$

הטענות הבאות שקולות:

1. f הפיך חח"ע ועל
2. $f^{-1}: B \to A$
3. קיימת $g: B \to A$ כך ש- $g \circ f = I_A$ וגם $f \circ g = I_B$.

הוכחה:

א. $(1) \rightarrow (2)$. טענה 2.

ב. $(2) \rightarrow (3)$

הוכחה:

יהי $f: A \to B$

נתון: $f^{-1}: B \to A$

צ"ל: קיימת $g: B \to A$ כך ש- $g \circ f = I_A$, $f \circ g = I_B$.

ניקח $g = f^{-1}$

$$g \circ f = f^{-1} \circ f \underset{\text{לפי טענה 3}}{=} I_A$$

$$f \circ g = f \circ f^{-1} \underset{\text{לפי טענה 3}}{=} I_B$$

ג. $(3) \rightarrow (1)$

לפי טענה 4 סעיף 1 f חח"ע. כי קיימת $g: B \to A$ כך ש- $g \circ f = I_A$

לפי טענה 4 סעיף 2 f על. כי קיימת $g: B \to A$ $f \circ g = I_B$.

משפט 2:

תהי $f:A\to B$ ותהי $g:B\to A$ כך ש- $g\circ f=I_A$, $f\circ g=I_B$

צ"ל: $g=f^{-1}$

הוכחה:

משפט 1: $(3)\Rightarrow(2)$

$$f^{-1}:B\to A$$

לפי תנאי (3) $f^{-1}\circ f=I_A$

$$g=I_A\circ g=(f^{-1}\circ f)\circ g=$$

$$=f^{-1}\circ(f\circ g)=f^{-1}\circ I_B=f^{-1}$$

<u>דוגמאות:</u>

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\frac{x+7}{5}$$

$$f(x)=y$$

$$\frac{x+7}{5}=y$$

$$x+7=5y$$

$$x=5y-7$$

$$g(x)=5x-7$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+7}{5}\right)$$

$$=\cancel{5}\left(\frac{x+\cancel{7}}{\cancel{5}}\right)-\cancel{7}=x$$

$$g\circ f=I_{\mathbb{R}}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(5x-7)$$

$$=\frac{(\cancel{5}x-\cancel{7})+\cancel{7}}{\cancel{5}}=x \qquad f\circ g=I_{\mathbb{R}}$$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$f(x) = -x$

$f = f^{-1}$

$f(x) = -x$

$f^{-1}(x) = -x$

משפט:

יהיו $f: A \to B$ $g: B \to C$ f, g חח"ע ועל.

צ"ל: שהפונקציות הבאות שוות:

$(g \circ f)^{-1}$

$f^{-1} \circ g^{-1}$

א. לשתי הפונקציות אותו תחום ואותו טווח:

$g \circ f: A \to C$ ולכן $(g \circ f)^{-1}: C \to A$

$f^{-1}: B \to A$, $g^{-1}: C \to B$ לכן $f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A$

ונראה ששתי הפונקציות "עושות" אותה התאמה. (כלומר אותם זוגות סדורים)

$(z, x) \in (g \circ f)^{-1} \leftrightarrow (x, z) \in g \circ f \leftrightarrow$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$

נסמן $f(x) = y \leftrightarrow (x, y) \in f \leftrightarrow (y, x) \in f^{-1}$

$g(y) = z \leftrightarrow (y, z) \in g \leftrightarrow (z, y) \in g^{-1}$ $\Bigg\} \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (z, x) \in f^{-1} \circ g^{-1}$

הוכחה יותר פשוטה:

$f^{-1}: B \to A$ פונקציה כי f חח"ע ועל

$g^{-1}: C \to B$ פונקציה כי g חח"ע ועל

$$f^{-1} \circ g^{-1} = I_A \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$$

$$= f \ldots$$

ד.

דיסקרטית – שיעור 5:

$$\underbrace{(g\circ f)^{-1}}_{h} \overset{?}{=} \underbrace{f^{-1}\circ g^{-1}}_{h^{-1}}$$

$f: A\to B$

$g: B\to A$

א. נשאר אותו הדבר.

$$\begin{cases} g\circ f = I_A \\ f\circ g = I_B \end{cases} \rightarrow g = f^{-1}$$

קיים r

$$\begin{cases} r\circ h \\ h\circ r \end{cases} \rightarrow r = h^{-1}$$

ב. נראה:

I. $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f) = I_A$

II. $(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1}) = I_B$

ולכן $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$ מ.ש.ל.

I.

$$f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f$$
$$= f^{-1}\circ(I_B\circ f)$$
$$= f^{-1}\circ f = I_A$$

עוצמה של קבוצות:

$f: \mathbb{N} \to$ זוגיים טבעיים

$f(x) = 2x$

f חח"ע ועל.

$\mathbb{N}$		זוגיים טבעיים
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
$\vdots$		$\vdots$

$|A| \leftarrow$ מספר איברים בקבוצה

שוות עוצמה! סימן

סימונים:

$$|\mathbb{N}| = \underbrace{|\text{זוגיים טבעיים}|}_{\text{רק את הקבוצות אינסופיות}}$$

$$\mathbb{N} \sim \text{זוגיים טבעיים}$$

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}$ שלמים		$\mathbb{N}$ טבעיים
-3	$\longleftrightarrow$	5
-2	$\longleftrightarrow$	3
-1	$\longleftrightarrow$	1
0	$\longleftrightarrow$	0
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

הגדרה:

נגדיר יחס באופן הבא:

$$R = \{(A, B) \mid A \sim B\}$$

$$\left.\begin{array}{c} (\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \in R \\ \mathbb{N} R \mathbb{Z} \\ \mathbb{N} \sim \mathbb{Z} \end{array}\right\} \text{כל אלה אומרים אותו הדבר}$$

הערה: היחס R (היחס $\sim$)

הוא יחס <u>שקילות</u>.

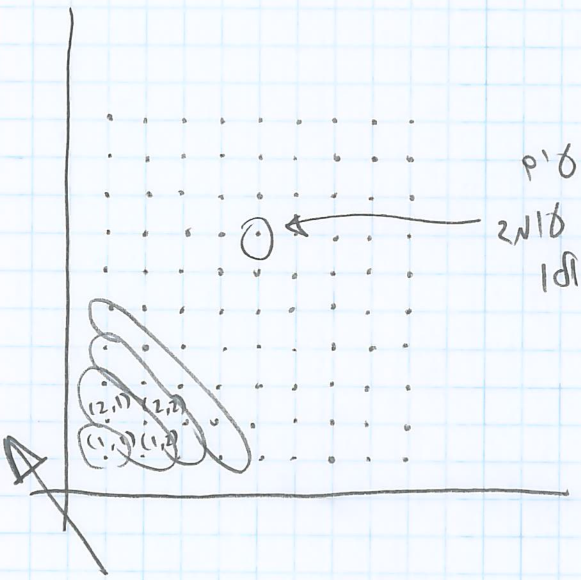
$|A|=|B|$

קיימת פונקציה חח"ע ועל מ-A ל-B.

$\mathbb{Q}^+ \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$

לא אומר לנו על עצמה.

$\mathbb{N}^+ \sim \mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+$



$\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^+$

$f(x)=x+1$

$0 \longrightarrow 1$

$1 \longrightarrow 2$

$2 \longrightarrow 3$

$\vdots \qquad \vdots$

$f: \mathbb{N}^+\times\mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$

$1 \longleftrightarrow (1,1)$

$2 \longleftrightarrow (1,2)$

$3 \longleftrightarrow (2,1)$

$4 \longleftrightarrow (3,1)$

$5 \longleftrightarrow (2,2)$

$6 \longleftrightarrow (1,3)$

$\vdots \qquad \vdots$

טענה:
תהי A בת מניה ותהי $B\subseteq A$ אזי B בת מניה

טענה: תהיינה A,B קבוצות זרות בנות מניה אזי $A\cup B$ בת מניה.

דיסקרטית - שיעור 6:

$$\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \sim \mathbb{N}^+$$

$$f((k,l)) = 2^{k-1}(2l-1)$$

$$f(3,2) = 12$$

צ"ל: f חח"ע ועל

א. צ"ל: f חח"ע.

נניח $f(k_1,l_1) = f(k_2,l_2)$

צ"ל: $(k_1,l_1) = (k_2,l_2)$

צ"ל: (א) $k_1 = k_2$

(ב) $l_1 = l_2$

(א) צ"ל: $k_1 = k_2$

נניח בשלילה ש- $k_1 \neq k_2$

בה"כ נניח $k_1 > k_2$ ← בלי הגבלת הכלליות

$f(k_1,l_1) = f(k_2,l_2)$ לכן (נציב ב- f):

$2^{k_1-1}(2l_1-1) = 2^{k_2-1}(2l_2-1)$ (חלק את שני האגפים ב- 2^{k_2-1}

$\underbrace{2^{k_1-k_2} \cdot (2l_1-1)}_{\text{זוגי - כפולה של 2.}} = \underbrace{2l_2-1}_{\text{אי-זוגי!}}$ כי $k_1-k_2 \geq 1$ $k_1 > k_2$

סתירה!

מ.ש.ל. (א).

(ב) צ"ל: $l_1 = l_2$

כיוון ש- $k_1 = k_2$. (חלק את שני האגפים ב- 2^{k_1-1}

$$2^{k_1-1} \cdot (2l_1-1) = 2^{k_2-1} \cdot (2l_2-1)$$

$$2l_1 - 1 = 2l_2 - 1$$

$$\longrightarrow l_1 = l_2$$

1.

$$100$$

$$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$$

עוצמה של קבוצות

שוויון עוצמות

<u>הגדרה</u>: קבוצה A נקראת **סופית** אם קיים מספר $n\in\mathbb{N}$ כך שמספר אבריה של A הוא n. אחרת A נקראת **אינסופית**..

<u>המטרה</u>:
ליחס לקבוצות סופיות ואינסופיות "גודל".

<u>הגדרה</u>: העוצמה של קבוצה סופית A היא מספר האיברים של A, והיא תסומן על ידי $|A|$.

קבוצות בנות מניה

<u>שאלה</u>:
מה לגבי הקבוצות האינסופיות?
האם ניתן להגדיר מושג האומר מתי שתי קבוצות (סופיות או אינסופיות) הן "שוות גודל"?

<u>הגדרה</u>: תהינה A, B קבוצות. נאמר ש-A ו-B **שקולות** אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A\to B$. נסמן זאת על ידי $A\sim B$. במקרה כזה אומרים גם שהקבוצות A ו-B **שוות עוצמה** ומסמנים זאת על ידי $|A|=|B|$.

<u>משפט</u>: תהי X קבוצה. היחס $\sim$ המוגדר על קבוצות ב-$P(X)$ הוא יחס שקילות.

<u>משפט</u>: תהיינה A ו-B שתי קבוצות סופיות. ל-A ו-B אותו מספר איברים או"א $A\sim B$.

<u>הערה</u>: בקבוצות אינסופיות אנו נתקלים בתופעות שאינן מוכרות לנו בקבוצות סופיות. למשל, בהינתן שתי קבוצות אינסופיות A, B, יתכן בהחלט ש-$A\subset B$ ואע"פ כן $|A|=|B|$, כפי שמדגימות הדוגמאות הבאות.

<u>דוגמאות</u>:
- הראה כי $\mathbb{N}^+\sim\mathbb{N}$.

- הראה כי $N \sim \{0,1,4,9,16,25,...\}$, ז"א שקימת התאמה חח"ע ועל בין המספרים הטבעיים לקבוצת הריבועים של המספרים הטבעיים.
- הראה כי $N \sim Z$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה A נקראת **בת מניה** אם A סופית או אם $A \sim N$.

<u>טענה:</u> $N \times N$ היא בת מניה.

<u>המלון של הילברט:</u>

נדמיין מלון שמספר חדריו בני מניה, הממוספרים 1,2,3,... . המלון בתפוסה מלאה ובחצות הלילה מקבל בעל המלון הודעה כי מלון סמוך לו הוצת, וכי יש לשכן את דייריו במלון שלו.
גם המלון שהוצת מספר חדריו הוא בן מניה, וגם הוא בתפוסה מלאה.
מה יעשה בעל המלון ?
בעל המלון מבקש מכל דייר בחדר n לעבור לחדר $2n$.
ברור כי באופן זה יכול בעל המלון לשכן במלונו פליטים מכל מספר <u>**סופי**</u> של מלונות שבהם מספר החדרים הוא בן מניה.
אולם בלילה הבא מתקבלת הודעה על הצתה של סדרה בת מניה של מלונות (בכל אחד מהמלונות מספר החדרים הוא בו מניה).
מה יעשה בעל המלון ?
דיירי המלון המקורי ישוכנו בחדרים האי זוגיים. דיירי המלון השני ישוכנו בחדרים הזוגיים שאינם מתחלקים ב-4. דיירי המלון השלישי ישוכנו בחדרים המתחלקים ב-4 ואינם מתחלקים ב-8, וכך הלאה.
באופן כללי, דיירי המלון ה-k-י ישוכנו בחדרים המתחלקים ב-2^{k-1} אבל לא ב-2^k, וביתר דיוק הדייר ה-l המגיע מהמלון ה-k-י ישוכן בחדר מספר $2^{k-1}(2l-1)$.
<u>טענה</u>: הפונקציה,

$$F: N \times N \to N$$
$$F(k,l) = 2^{k-1}(2l-1)$$

היא חח"ע ועל.

<u>מסקנה</u>: אם $\{A_i\}_{i \in I}$ משפחה בת מניה של קבוצות זרות בנות מניה כל אחת, אז גם הקבוצה המתקבלת מהאיחוד שלהן היא קבוצה בת מניה.

<u>טענה</u>: כל תת קבוצה של קבוצה בת מניה היא בת מניה.

<u>מסקנה</u>: אחוד מספר בן מניה של קבוצות בנות מניה (לאו דווקא זרות) גם הוא קבוצה בת מניה.

עוצמה של קבוצות

שוויון עוצמות

הגדרה: קבוצה A נקראת **סופית** אם קיים מספר $n \in N$ כך שמספר אבריה של A הוא n. אחרת A נקראת **אינסופית**..

המטרה:
ליחס לקבוצות סופיות ואינסופיות "גודל".

הגדרה: העוצמה של קבוצה סופית A היא מספר האיברים של A, והיא תסומן על ידי $|A|$.

קבוצות בנות מניה

שאלה:
מה לגבי הקבוצות האינסופיות?
האם ניתן להגדיר מושג האומר מתי שתי קבוצות (סופיות או אינסופיות) הן "שוות גודל"?

הגדרה: תהינה A, B קבוצות. נאמר ש-A ו-B **שקולות** אם קיימת פונקציה חח"ע ועל $f:A \to B$. נסמן זאת על ידי $A \sim B$. במקרה כזה אומרים גם שהקבוצות A ו-B **שוות עוצמה** ומסמנים זאת על ידי $|A|=|B|$.

משפט: תהי X קבוצה. היחס $\sim$ המוגדר על קבוצות ב-$P(X)$ הוא יחס שקילות.

משפט: תהיינה A ו-B שתי קבוצות סופיות. ל-A ו-B אותו מספר איברים או"א $A \sim B$.

הערה: בקבוצות אינסופיות אנו נתקלים בתופעות שאינן מוכרות לנו בקבוצות סופיות. למשל, בהינתן שתי קבוצות אינסופיות A, B, יתכן בהחלט ש-$A \subset B$ ואע"פ כן $|A|=|B|$, כפי שמדגימות הדוגמאות הבאות.

דוגמאות:

- הראה כי $N^{+} \sim N$.

- הראה כי $N \sim \{0,1,4,9,16,25,\ldots\}$, ז"א שקימת התאמה חח"ע ועל בין המספרים הטבעיים לקבוצת הריבועים של המספרים הטבעיים.
- הראה כי $N \sim Z$.

<u>הגדרה</u>: קבוצה A נקראת **בת מניה** אם A סופית או אם $A \sim N$.

<u>טענה</u>: $N^+ \times N^+$ היא בת מניה.

<u>המלון של הילברט</u>:

נדמיין מלון שמספר חדריו בני מניה, הממוספרים ...,1,2,3. המלון בתפוסה מלאה ובחצות הלילה מקבל בעל המלון הודעה כי מלון סמוך לו הוצת, וכי יש לשכן את דייריו במלון שלו.
גם המלון שהוצת מספר חדריו הוא בן מניה, וגם הוא בתפוסה מלאה.
מה יעשה בעל המלון ?
בעל המלון מבקש מכל דייר בחדר n לעבור לחדר $2n$.
ברור כי באופן זה יכול בעל המלון לשכן במלונו פליטים מכל מספר <u>**סופי**</u> של מלונות שבהם מספר החדרים הוא בן מניה.
אולם בלילה הבא מתקבלת הודעה על הצתה של סדרה בת מניה של מלונות (בכל אחד מהמלונות מספר החדרים הוא בו מניה).
מה יעשה בעל המלון ?
דיירי המלון המקורי ישוכנו בחדרים האי זוגיים. דיירי המלון השני ישוכנו בחדרים הזוגיים שאינם מתחלקים ב-4. דיירי המלון השלישי ישוכנו בחדרים המתחלקים ב-4 ואינם מתחלקים ב-8, וכך הלאה.
באופן כללי, דיירי המלון ה-k-י ישוכנו בחדרים המתחלקים ב-2^{k-1} אבל לא ב-2^k, וביתר דיוק הדייר ה-l המגיע מהמלון ה-k-י ישוכן בחדר מספר $2^{k-1}(2l-1)$.
<u>טענה</u>: הפונקציה,

$$F: N^+ \times N^+ \to N^+$$
$$F(k,l)=2^{k-1}(2l-1)$$

היא חח"ע ועל.

<u>מסקנה</u>: אם $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה בת מניה של קבוצות זרות בנות מניה כל אחת, אז גם הקבוצה המתקבלת מהאיחוד שלהן היא קבוצה בת מניה.

<u>טענה</u>: כל תת קבוצה של קבוצה בת מניה היא בת מניה.

<u>מסקנה</u>: אחוד מספר בן מניה של קבוצות בנות מניה (לאו דווקא זרות) גם הוא קבוצה בת מניה.

<u>סימון</u>: העוצמה של קבוצת המספרים הטבעיים מסומנת ב- $\aleph_0$

<u>עוצמת הרצף</u>

<u>הערה</u>: עד כה ראינו שהקבוצות N, Q, Z כולם שקולות ובנות מניה.
האם ישנן קבוצות אינסופיות שאינן בנות מניה?
האם כל שתי קבוצות אינסופיות שקולות?

<u>סימון</u>: יהיו a,b שני מספרים ממשיים. נסמן את הקבוצה $\{x|x\in R,\ a<x<b\}$ על ידי (a,b) ונקרא לקבוצה זאת הקטע הפתוח מ-a ל-b.
הקבוצה $\{x|x\in R,\ a\le x<b\}$ תסומן על ידי $[a,b)$ ונקרא לקבוצה זאת הקטע החצי פתוח מצד ימין מ-a ל-b.
הקבוצה $\{x|x\in R,\ a\le x\le b\}$ תסומן על ידי $[a,b]$ ונקרא לקבוצה זאת הקטע הסגור מ-a ל-b.

<u>הערה</u>: שימו לב, כאן הסימון $(0,1)$ מייצג את קבוצת המספרים הממשיים בין 0 ל-1, ולא את הזוג הסדור $(0,1)$.

<u>משפט</u>: הקבוצה $(0,1]=\{x|\ x\in R|\ 0<x\le 1\}$ אינה בת מניה.

<u>הגדרה</u>: תהינה A,B קבוצות אינסופיות. נאמר שעוצמתה של A **קטנה או שווה** לעוצמתה של B, ונסמן זאת על ידי $|A|\le|B|$, אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$.
נאמר שעוצמתה של A **קטנה ממש** מעוצמתה של B ונסמן זאת על ידי $|A|<|B|$, אם $|A|\le|B|$, אולם לא קיימת פונקציה על מ-A ל-B.

<u>טענה</u>: ההגדרה האחרונה אינה תלויה בבחירת הנציגים.

<u>סימון</u>: עוצמת הקבוצה $(0,1)$ מסומנת ע"י א.

$$|N|<|\ (0,1)\ | = \aleph$$

<u>דוגמאות נוספות לקבוצות בעלות עוצמה א</u> :

- קבוצת הסדרות האינסופיות של מספרים טבעיים.
- קבוצת כל הקבוצות האינסופיות של מספרים טבעיים אינה בת מניה.

<u>משפט</u>: עוצמת הקבוצה $(0,1)$ של המספרים הממשיים בין 0 ל-1, שווה לעוצמת קבוצת כל המספרים הממשיים.

<u>טענה</u>: לכל שני מקטעים על הישר יש אותה עוצמה.

<u>משפט (קנטור)</u>: תהי A קבוצה, אז $|A|<|P(A)|$.

<u>מסקנה</u>: $|N|<|P(N)|<|P(P(N))|<|P(P(P(N)))|<\ldots$. כלומר:

- אין עוצמה אינסופית מקסימלית.
- קימות אינסוף עוצמות אינסופיות השונות זו מזו.

<u>שאלה</u>: האם קימת / לא קימת עוצמה בין $\aleph_0$ ל-א.

<u>קצת היסטוריה</u>:

- קנטור שיער ב-1877 שאין עוצמות כאלה, ו-א היא העוצמה האינסופית העוקבת ל-$\aleph_0$. השערה זו נודעה בשם **השערת הרצף**.
- גרסה מרחיקת לכת עוד יותר של אותה השערה אומרת שאם A קבוצה אינסופית, אז אין עוצמה בין $|A|$ לבין $|P(A)|$. השערה זו נקראת **השערת הרצף המוכללת**.
- השערת הרצף הייתה פתוחה שנים רבות ואף נכללה ברשימת 23 הבעיות שהציג הילברט בקונגרס המתמטי בשנת 1900 כבעיות יעד למתמטיקאי המאה ה-20.
- הבעיה נפתרה, אולם בדרך מפתיעה ביותר: קורט גדל הוכיח ב-1938 שלא ניתן להפריך את השערת הרצף במסגרת תורת הקבוצות הקלאסית.
- ב-1963 הוכיח פול כהן שלא ניתן גם להוכיח את השערת הרצף במסגרת זו.

<u>משפט (קנטור ברנשטיין)</u>: תהיינה A,B קבוצות כלשהן. אם $|A|\leq|B|$ וגם $|B|\leq|A|$, אז $|A|=|B|$. (ללא הוכחה).

<u>משפט</u>: $|R|=|P(N)|$.

<u>הערה</u>: ראינו שיש לפחות שני עוצמות אינסופיות.

- עוצמת קבוצת המספרים הטבעיים, שנהוג לסמנה על ידי $\aleph_0$.
- עוצמת קבוצת המספרים הממשיים, שנהוג לסמנה על ידי $\aleph$ (עוצמת הרצף).

<u>טענה</u>: לכל שני מקטעים על הישר יש אותה עוצמה.

<u>אריתמטיקה של עוצמות</u>

<u>חיבור עוצמות</u>

<u>הגדרה</u>: יהיו α, β שתי עוצמות. נגדיר את העוצמה $\alpha + \beta$ באופן הבא: יהי A ו-B קבוצות זרות כך ש-$|A|=\alpha$ ו-$|B|=\beta$, אזי, $\alpha + \beta=|A|+|B|=|A\cup B|$.

<u>הערה</u>: יהיו A, B קבוצות כך ש-$|A|=\alpha$ ו-$|B|=\beta$, אזי הקבוצות $A\times\{1\}$, $B\times\{2\}$ הן קבוצות זרות בעלות העוצמה α ו-β בהתאמה.

<u>טענה</u>: ההגדרה האחרונה אינה תלויה בבחירת הנציגים, ז"א, אם $A_1\sim A_2$, $B_1\sim B_2$ וגם $A_1\cap B_1=A_2\cap B_2=\varnothing$ אזי $|A_1\cup B_1|=|A_2\cup B_2|$.

<u>דוגמאות</u>:

- $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$.
- $\aleph_0+1=\aleph_0$.
- $\aleph+\aleph=\aleph$.
- $\aleph+2=\aleph$.
- $\aleph+\aleph_0=\aleph$.

כפל עוצמות

<u>הגדרה</u>: יהיו α, β שתי עוצמות. נגדיר את העוצמה $\alpha \cdot \beta$ באופן הבא: יהי A ו-B קבוצות כך ש-$|A|=\alpha$ ו-$|B|=\beta$, אזי, $\alpha \cdot \beta=|A|\cdot|B|=|A\times B|$.

<u>טענה</u>: ההגדרה האחרונה אינה תלויה בבחירת הנציגים.

<u>משפט</u>: כפל עוצמות מקיים את התכונות הבאות:

1. $|A|\times|B|=|B|\times|A|$
2. $(|A|\times|B|)\times|C|=|A|\times(|B|\times|C|)$

<u>דוגמאות</u>:

- $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$.
- $\aleph\cdot\aleph_0=\aleph$.
- $|Q|=\aleph_0$.

חזקה של עוצמות

<u>סימון</u>: A^B מסמן את קבוצת הפונקציות מ-B ל-A.

<u>הגדרה</u>: יהיו α, β שתי עוצמות. נגדיר את העוצמה α^β באופן הבא: יהי A ו-B קבוצות כך ש-$|A|=\alpha$ ו-$|B|=\beta$, אזי, $\alpha^\beta=|A|^{|B|}=|A^B|$.

<u>טענה</u>: ההגדרה האחרונה אינה תלויה בבחירת הנציגים.

<u>משפט</u>: חזקה של עוצמות מקיימת את התנאים הבאים:

$$|A|^{|B|}\cdot|A|^{|C|}=|A|^{|B|+|C|}$$
$$|A|^{|C|}\cdot|B|^{|C|}=(|A|\cdot|B|)^{|C|}$$
$$(|A|^{|B|})^{|C|}=|A|^{|B|\cdot|C|}$$

<u>דוגמאות</u>:

- $\aleph_0^{\aleph_0}=\aleph$
- $2^{\aleph_0}=\aleph$
- $\aleph^{\aleph_0}=\aleph$
- $0^{|A|}=0$, לכל $A\neq\emptyset$.
- $A^0=1$.

דיסקרטית - שיעור ד:

משפט: הקבוצה: $(0,1] = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < x \leq 1\}$

אינה בת מניה.

הוכחה:

צ"ל: לא קיימת פונקציה $f: \mathbb{N}^+ \to (0,1]$ חח"ע ועל.

נניח בשלילה שקיימת $f: \mathbb{N}^+ \to (0,1]$ חח"ע ועל.

כל מספר בקבוצה $(0,1]$ ניתן לרשום בצורה יחידה כשבר עשרוני אינסופי ולכן $x \in (0,1]$, $x = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ $\alpha_i \in [0,\ldots,9]$ ללא אינסוף אפסים.

(סגל על $f: \mathbb{N}^+ \to (0,1]$ חח"ע ועל.

$f(1) = 0.\boxed{5}387289 1\ldots$

$f(2) = 0.2\boxed{2}711 38\ldots$

$f(3) = 0.11\boxed{2}7777\ldots$

$f(4) = 0.643\boxed{1}564\ldots$

$\vdots$

נ"ג מספר $\beta \in (0,1]$ באופן הבא

$(\beta = 0.1112\ldots)$

$\beta = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$

(*) $\beta_i = \begin{cases} 1 & \alpha_{ii} \neq 1 \\ 2 & \alpha_{ii} = 1 \end{cases}$

כיוון ש- f על קיים $k \in \mathbb{N}^+$ רק ש- $f(k) = \beta$

(סגל על β_k (הספרה ה-k'ית אחרי הנקודה ב- β)

$\beta_k = \alpha_{kk}$ כי $f(k) = \beta$ הספרה ה-k'ית אחרי הנקודה

אבל β_k נוצר ע"י הנוסחה (*) של $f(k)$.

$\boxed{\beta_k \neq \alpha_{kk}}$ סתירה!

$$|A| \leq |B|$$

$$|\mathbb{N}| \leq |(0,1]|$$

$f(x) = \frac{1}{x}$ חח"ע.

$$|\mathbb{N}^+| < (0,1]$$

$|\mathbb{N}^+| = \aleph_0$ $\qquad$ $|(0,1]| = \aleph$

דיסקרטית - שיעור ד:

הוכחנו: $|(0,1]| \neq |\mathbb{N}^+|$

הגדרנו: תהיינה A, B קבוצות

$|A| \leq |B|$

$|A| < |B|$

תרגיל: $|\mathbb{N}^+| < |(0,1]|$

(1) $f: \mathbb{N}^+ \longrightarrow (0,1]$

חח"ע $f(n) = \frac{1}{n}$

(2) לא קיימת פונקציה על מ- $\mathbb{N}^+$ ל- $(0,1]$. הוכחנו בשבוע שעבר.

סימון:

$|(0,1]| = \aleph$

משפט קנטור:

תהי A קבוצה

אזי $|A| < |P(A)|$

דוגמא:

$A = \mathbb{N}^+$

$|\mathbb{N}^+| < |P(\mathbb{N}^+)| < |P(P(\mathbb{N}^+))| < |P(P(P(\mathbb{N}^+)))| < \dots$

תרגיל: $|(0,1]| = |P(\mathbb{N}^+)|$

הוכחת משפט קנטור:

(1) $f: A \to P(A)$

חח"ע $f(x) = \{x\}$

$x \in A$

צ"ל: לא קיימת פונקציה על מ-A ל-$P(A)$.

נ"ח בשלילה שקיימת פונקציה על מ-A ל-$P(A)$ נסמנה g.

$g: A \to P(A)$ על.

נבנה קבוצה B כך ש- $B \subseteq A$ באופן הבא:

$(B \in P(A))$

$$B = \{a \in A \mid a \notin g(a)\}$$

דוגמא:

$A = \mathbb{N}^+$

$g(1) =$ זוגיים חיוביים

$g(2) = \{1,2,\dots,10\}$

$g(3) = \{10,11,\dots,20\}$

$g(4) =$ אי-זוגיים

$g(5) = \mathbb{N}^+$

$B \in P(A)$, g על,

קיים מקור ל-$P(A)$

בתחום.

נסמנו $a_0 \in A$, כלומר

$g(a_0) = B$

נ"ח ש- $a_0 \in B$ $\Longleftarrow$

$\Longleftarrow$ (הגדרת B) $a_0 \notin g(a_0)$ $\Longleftarrow$

$\Longleftarrow$ ($g(a_0)=B$) $a_0 \notin B$. לא יתכן. לכן $a_0 \notin B$ $\Longleftarrow$ $a \in g(a_0)$ $\Longleftarrow$

$\Longleftarrow$ $a_0 \in B$ לא יתכן. סתירה!

$|P(\mathbb{N}^+)| = \aleph_1$ $\qquad$ $|(0,1)| = \aleph_1$

$|P(P(\mathbb{N}^+))| = \aleph_2$

$|P(P(P(\mathbb{N}^+)))| = \aleph_3$

$\vdots$

מסקנה:

אם $|A| \le |B|$ וגם $|B| \le |A|$ אזי $|A| = |B|$

הגדרה:

יהיו α, β עוצמות.

נבחר שתי קבוצות זרות A ו- B כך ש- $(A)=\alpha$, $(B)=\beta$, אזי

$$\alpha+\beta=|A\cup B|$$

דוגמא:

$$\mathbb{N}^+\cup\{0\}=\mathbb{N}$$

$$|\mathbb{N}|=\aleph_0$$

$$|\mathbb{N}^+|=\aleph_0$$

$$|\{0\}|=1$$

זרות

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

דוגמא:

זרות $\begin{cases} A=\{2n \mid n\in\mathbb{N}^+\} \\ B=\{2n+1 \mid n\in\mathbb{N}^+\} \end{cases}$

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

$$A\cup B=\mathbb{N}^+$$

$$|\mathbb{N}^+|=\aleph_0$$

$$|A|=\aleph_0$$

$$|B|=\aleph_0$$

הגדרה:

יהיו α, β עוצמות.

נבחר שתי קבוצות A ו- B כך ש- $(A)=\alpha$, $(B)=\beta$

אזי

$$\alpha^\beta=|\{f \mid f:B\to A\}|$$

$$\alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\cdot\alpha^\gamma$$

דיסקרטית - שיעור 9

אינדוקציה:

סוף טענה: לכל $n\geq 0$ טבעי מתקיימת תכונה $q(n)$.

לכל $n\geq a$ טבעי מתקיימת תכונה $q(n)$.
טבעי קבוע

הוכחה רגילה:

יהי n טבעי כלשהו.

צ"ל: $q(n)$

דוגמאות: (לסוף טענה)

טענה **(1)**: לכל n טבעי מתקיים $0+1+2+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

טענה **(2)**: לכל קבוצה סופית A מתקיים: $|P(A)|=2^{|A|}$

הוכחה באינדוקציה:

מבנה הוכחה:

1. בסיס האינדוקציה:
$n=0$ $n=a$
צ"ל הטענה מתקיימת עבור n קטן יותר

2. שלב האינדוקציה:

(i) הנחת האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור n לכל $n\geq a$ / $n\geq 0$

(ii) צ"ל הטענה נכונה עבור $n+1$ לכל $n\geq a$ / $n\geq 0$

(רשום שוב את המבנה של הוכחה באינדוקציה: (צורה סכמטית)

הוכחה באינדוקציה - מבנה:

1. בסיס אינדוקציה: צ"ל $q(0)$

2. שלב האינדוקציה: צ"ל $q(n)\Rightarrow q(n+1)$ לכל $n\geq 0$

יהי $n\geq 0$ כלשהו

צ"ל: $q(n)\Rightarrow q(n+1)$

נניח: $q(n)$

צ"ל: $q(n+1)$

$q(0)\ T$

$q(0) \Rightarrow q(1)\ T$

$q(1) \Rightarrow q(2)\ T$

$q(2) \rightarrow q(3)$

$\vdots$

תרגול:

1. טענה:

לכל $n\geq 0$ מתקיים $0+1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

הוכחה באינדוקציה (על n)

(i) בסיס האינדוקציה:

צ"ל שהטענה נכונה עבור $n=0$

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{0\cdot 1}{2} = 0$$

(ii) נניח שהטענה נכונה עבור n, לכל $n\geq 0$, כלומר נניח:

$$0+1+2+\ldots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

צ"ל שהטענה נכונה עבור $n+1$ לכל $n\geq 0$, כלומר נניח:

$$0+1+2+\ldots+n+1 = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

נסתכל על: $0+1+2+\ldots+n+1$

$$\underbrace{0+1+2+\ldots+n}_{=} + n+1$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$= \frac{n\cdot(n+1)}{2} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

מ.ש.ל.

2. טענה:

לכל קבוצה סופית A מתקיים $|P(A)| = 2^{|A|}$

נסמן $|A| = n$

באינדוקציה על n...

אפשר לרשום גם את הטענה מחדש:

טענה:

לכל קבוצה סופית A מגודל n מתקיים: $|P(A)| = 2^n$

הוכחה: באינדוקציה על n

(i) בסיס האינדוקציה: תהי A קבוצה בגודל 0.

צ"ל: $|P(A)| = 2^0$

$$|A| = 0 \implies A = \phi$$

$$P(\phi) = \{\phi\}$$

$$|P(\phi)| = |\{\phi\}| = 1$$

$$2^0 = 1$$

(ii) שלב האינדוקציה:

נניח לכל קבוצה סופית A מגודל n, לכל $n \geq 0$, מתקיים $|P(A)| = 2^n$

צ"ל: לכל קבוצה סופית B בגודל n+1, לכל $n \geq 0$, מתקיים:

$$|P(B)| = 2^{n+1}$$

תהי B קבוצה כלשהי מגודל n+1:

$$B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_{n+1}\} =$$

$$= \underbrace{\{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}}_{\text{סימון } A''} \cup \{b_{n+1}\}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$|P(A)| = 2^n$ $\qquad A = \{b_1, b_2, b_3, \dots b_n\}$

$$P(A) \subseteq P(B)$$

$$P(B) = P(A) \cup \underbrace{\{D \subseteq B \mid b_{n+1} \in D\}}_{= S}$$

הפרדנו את $P(B)$ לאיחוד של שתי קבוצות זרות ולכן:

$$|P(B)| = |P(A)| + |S| = 2^n$$

נראה $|P(A)| = |S|$

נבנה: $f: P(x) \to S$

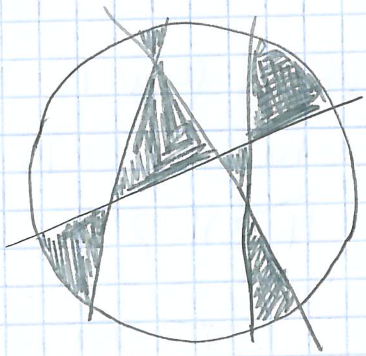
$$f(E) = E \cup \{b_{n+1}\}$$

f חח"ע.
f על.

$$P(B) = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

2 תרגילים:

* בע"ת הריצוף בצבעים.
* מפה מדינית.



טענה: על כל קווים שנעביר אפשר להשתמש רק ב-2 צבעים.

אינדוקציה

עקרון האינדוקציה המתמטית

<u>הערה</u>: עקרון האינדוקציה המתמטית הוא כלי שימושי להוכחת טענות מתמטיות הקשורות במספרים הטבעיים. עקרון זה מבוסס על האקסיומה הבאה.

<u>האקסיומה של האינדוקציה המתמטית</u>:

תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים. אז יש ב-A איבר מינימלי, כלומר, קיים $a\in A$ כך שלכל $b\in A$ מתקיים $b\geq a$.

<u>משפט (עקרון האינדוקציה המתמטית)</u>:

תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n\in N$. אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה**: הטענה $P(0)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה**: לכל $n\geq 0$,
   אם $P(n)$ נכון אז $P(n+1)$ נכון.

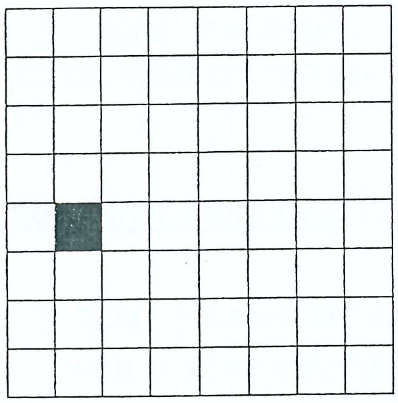
אז $P(n)$ נכון לכל מספר טבעי n.

<u>דוגמאות</u>:

1. הוכח כי $0+1+2+...+n=n(n+1)/2$ לכל מספר טבעי n.

2. תהי A קבוצה סופית מעוצמה $|A|=n$. אז מספר התת-הקבוצות של A הוא $|P(A)|=2^n$.

3. <u>בעיית הריצוף</u>: נתון לוח משבצות בגודל $m \times m$. משבצת אחת בלוח צבועה בשחור. בנוסף יש מרצפת מיוחדות שנראות כמו לוח בגודל 2×2 שפינתו האחת חסרה (ראה ציור).



עלינו לכסות את הלוח כולו (פרט למשבצת השחורה) בעזרת המרצפות המיוחדות, כאשר אפשר לשים את המרצפות המיוחדות בכל כיוון רצוי. כסוי כזה נקרא ריצוף של הלוח.

<u>טענה</u>: לבעיית הריצוף של לוח בגודל $m \times m$ יש פתרון לכל m שהוא חזקה של 2.

הוכח את הטענה באינדוקציה.

הרחבות של עקרון האינדוקציה המתמטית

משפט: תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n\in N$. אם קיים מספר $a\in N$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה**: הטענה $P(a)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה**: לכל $n\geq a$,
   אם $P(n)$ נכון אזי $P(n+1)$ נכון.

אז $P(n)$ נכונה לכל מספר טבעי $n\geq a$.

דוגמא

הוכח: לכל מספר טבעי $n\geq 5$ מתקיים $n^2<2^n$

משפט (עקרון האינדוקציה המתמטית המלאה):

תהי $P(n)$ טענה כלשהי לגבי המספר הטבעי $n\in N$. אם קיים מספר $a\in N$ כך שמתקיימים שני התנאים הבאים:

1. **בסיס האינדוקציה**: הטענה $P(a)$ נכונה.
2. **שלב האינדוקציה**: לכל $n>a$,
   אם $P(k)$ נכון לכל $a\leq k\leq n-1$ אזי $P(n)$ נכון.

אז $P(n)$ תקפה לכל מספר טבעי $n\geq a$.

הערה: במקרים מסוימים יהיה צורך להוכיח בבסיס האינדוקציה את נכונות הטענה עבור יותר מערך מסוים אחד, וזאת מכיוון ששלב האינדוקציה יהיה תלוי בנכונות הטענה בכמה ערכים קודמים.

תזכורת (הגדרה): מספר טבעי $n\in N$, $n>1$, נקרא ראשוני אם הוא מתחלק רק ב-1 ובעצמו.

דוגמאות:

1. הוכח: כל מספר טבעי $n>1$ ניתן לרשום כמכפלה של מספרים ראשוניים.

מכפלה כזאת נקראת **פירוק של n לגורמים ראשונים**.
הערה: מכפלה הכוללת גורם אחד ויחיד x אף היא נחשבת למכפלה.
לכן, המשפט ודאי תקף לכל מספר ראשוני n.

2. הוכח: יש אינסוף מספריים ראשונים.

3. מצא את השגיאה:

"טענה": לכל n סוסים אותו צבע.
"הוכחה": נוכיח את הטענה באינדוקציה על n.
בסיס האינדוקציה: $n=1$, ברור שלסוס אחד יש אותו צבע.
שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה ל-$n-1\geq 1$. כלומר, לכל $n-1$ סוסים יש אותו צבע. נוכיח את הטענה ל-n סוסים. תהי $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$ קבוצה כלשהי של n סוסים. נגדיר שתי קבוצות חדשות, כל אחת בת $n-1$ סוסים:

$$A=\{x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}\} \quad B=\{x_2,\ldots,x_{n-1},x_n\}$$

לפי הנחת האינדוקציה לכל הסוסים ב-A אותו צבע ולכל הסוסים ב-B אותו צבע (לאו דווקא אותו צבע). אולם $x_2\in A\cap B$ ולכן לכל הסוסים ב-A וב-B אותו צבע והוא צבעו של x_2. אנו מסיקים כי לכל הסוסים בקבוצה X אותו צבע. לכן לפי עקרון האינדוקציה הטענה נכונה לכל קבוצה של $n\geq 1$ סוסים.

הגדרות רקורסיביות

<u>הגדרת רקורסיבית של קבוצה</u>

ניתן להגדיר קבוצה באופן הבא:
1. בסיס: הצהרה שאיברים מסוימים שיכים לקבוצה.
2. כלל רקורסיבי: מגדירים איברים נוספים (חדשים) בקבוצה, תוך שימוש באיברים שכבר ידוע עליהם שהם בקבוצה.

דוגמא: נגדיר באופן רקורסיבי את הקבוצה:

$$A=\{\, n\in N \mid \text{מתחלק ה-5 ללא שארית } n \,\}$$

<u>הגדרות רקורסיביות בשפות תכנות</u>

תיאור מדויק של שפת תכנות מחייב שימוש בהגדרות רקורסיביות.
כמו כן, פיתוח מהדיר לשפת תכנות מתבסס על ההגדרות הרקורסביות של שפת התכנות.

דוגמא:
הגדרת ביטוי חשבוני.

<u>הגדרות רקורסיביות במתמטיקה</u>

הגדרות רבות מתחום המתמטיקה עצמה הן רקורסיביות.

דוגמאות:
1. הגדרת "חזקה" של פונקציות.
2. הגדרת סכום של n מספרים.

<u>הגדרת רקורסיבית של פונקציה</u>

נוסחאות נסיגה

הגדרת פונקציה בצורה רקורסיבית היא חישוב ערכה במספר כלשהו על ידי שימוש בערכי הפונקציה במספרים קטנים יותר.

דוגמא:

נגדיר את פונקצית העצרת, $f(n)=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n=n!$, באופן רקורסיבי.

הגדרה: תהי A קבוצה כלשהי ותהי $f:N\to A$ פונקציה. **הגדרה רקורסיבית** של f תכלול:

1. **ערכי התחלה**: קביעת הערכים $f(0),f(1),\ldots,f(k)$ כאשר k מספר טבעי כלשהו.
2. **כלל רקורסיבי:** הגדרת $f(n)$, לכל $n>k$, בעזרת הערכים $f(0),f(1),\ldots,f(n-1)$, או בעזרת חלק מערכים אלה.

ההגדרה של $f(n)$ על ידי ערכים קודמים נקראת גם **נוסחת נסיגה** או **נוסחה רקורסיבית**.

דוגמאות:

- רשום הגדרה רקורסיביות לפונקציה $f:N\to N$ הנתונה על ידי $f(n)=2^n$.

- תהי $f:N\to N$ פונקציה המוגדרת על ידי **נוסחת הנסיגה** הבאה:
  1. ערך התחלתי: $f(0)=1$.
  2. כלל רקורסיבי: $f(n)=3\cdot f(n-1)+5$ לכל $n>0$.

  הוכח: $f(n)=(7\cdot 3^n-5)/2$ לכל $n\geq 0$.

- תהי $f:N\times N\to N$ פונקציה המוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה:
  1. ערך התחלתי: $f(0,0)=1$
  2. כלל רקורסיבי:

     $f(n,m)=2\cdot f(n-1,m)$ לכל $m\geq 0$, $n>0$.

     $f(n,m)=3\cdot f(n,m-1)$ לכל $m>0$, $n\geq 0$.

  חשב את $f(3,2)$.

קומבינטוריקה

כללי מניה בסיסיים

משפט (עקרון הסכום): תהי A,B קבוצות סופיות זרות, אז $|A\cup B|=|A|+|B|$.

מסקנה: אם A,B קבוצות סופיות ו-$A\subseteq B$ אז $|B\setminus A|=|B|-|A|$

דוגמא:

- בספריה 50 ספרים בשפה האנגלית ו-70 ספרים בשפה העברית. כמה ספרים בספריה בשפה האנגלית והעברית?

משפט (עקרון מכפלה): אם A,B קבוצות סופיות, אז $|A\times B|=|A|\cdot|B|$.

דוגמאות:

- בחניון יש ארבע כניסות ו-8 יציאות. בכמה דרכים שונות נהג יכול להיכנס לחניון ולצאת ממנו.

משפט: תהיינה A,B קבוצות סופיות ותהי $R\subseteq A\times B$.

1. אם קיים מספר טבעי s כך שלכל $a\in A$ מתקיים $|\{b|\ b\in B,\ (a,b)\in R\}|=s$, אז $|R|=|A|\cdot s$
2. אם קיים מספר טבעי t כך שלכל $b\in B$ מתקיים $|\{a|\ a\in A,\ (a,b)\in R\}|=t$, אז $|R|=t\cdot|B|$

דוגמאות:

1. בשכונה מסמנים כל בית על ידי 2 אותיות. בכמה דרכים שונות אפשר לסמן בית אם:
   א. אסור שאות תחזור על עצמה באותו סימון?
   ב. מותר לחזור על אות באותו סימון?
2. כמה מספרים אי-זוגיים יש בין 0 ל-99?
3. כמה מספרים אי-זוגיים יש בין 0 ל-99 עם ספרות שונות?
4. בכיתה 32 בנים. כל בן מכיר 5 בנות וכל בת מכירה 8 בנים, כאשר היכרות היא הדדית. כמה בנות יש בכיתה?

משפט (עקרון הסכום המורחב): תהינה $A_1,A_2,\ldots,A_n$ קבוצות סופיות וזרות זו לזו. אזי: $|\cup_{i=1}^{n}A_i|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$.

מסקנה: לכל שתי קבוצות סופיות A,B מתקיים $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

משפט (עקרון המכפלה המורחב): תהינה $A_1,A_2,\dots,A_n$ קבוצות סופיות.
אזי: $|A_1\times A_2\times\dots\times A_n|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|$.

דוגמאות:

1. סיסמת משתמש במחשב מסוים בנויה מחמישה תווים, הכוללים 2 אותיות באנגלית ואח"כ 3 ספרות. כמה סיסמאות שונות יש?
2. (ייצוג קבוצה על ידי סדרה של 0,1)
   תהי $A=\{1,2,\dots n\}$. מהו מספר התת קבוצות של A?
3. א. בכמה מספרים טבעיים יש 6 ספרות בדיוק?
   ב. בכמה מספרים טבעיים שש ספרתיים לא מופיעה הספרה 0?
   ג. בכמה מספרים טבעיים שש ספרתיים אין ספרות צמודות וזהות?

בעיות מניה בסיסיות

הערה: מולטי קבוצה הוא הרחבה של מושג הקבוצה המאפשרת לאיברים להופיע מספר פעמים.

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר	מספר ה-k-יות הסדורות שאיבריהן מתוך $\{1,2,\dots,n\}$ ללא חזרה על אותו איבר.	מספר ה-k-יות הסדורות שאיבריהן מתוך $\{1,2,\dots,n\}$.
אין חשיבות לסדר	מספר התת קבוצות מעוצמה k מתוך $\{1,2,\dots,n\}$	מספר המולטי קבוצות מעוצמה k מתוך $\{1,2,\dots,n\}$

בחירה עם חזרות שהסדר חשוב - חליפות עם חזרות

משפט: תהי A קבוצה, $|A|=n$, ויהי $k\in N$. מספר הסדרות שבאורך k שניתן לבנות מאברי A הוא n^k.

דוגמא:

- בטופס טוטו יש 16 משחקים. כל משחק יכול להסתיים ב-3 תוצאות אפשריות: ניצחון של הקבוצה המארחת, הפסד או תיקו. מסמנים זאת בטופס באחד משלושת הסימונים $A=\{1,2,x\}$. בכמה דרכים שונות ניתן למלא טור בטופס טוטו.

תמורות

הגדרה: תהי A קבוצה, $n=|A|$. סדרה באורך n ללא חזרות של אברי A (דהינו, כל איבר של A מופיע פעם אחת בדיוק) נקראת **תמורה** (**פרמוטציה**) של A.

דוגמא:

- אם $A=\{1,2,3\}$ מהם התמורות האפשריות השונות של A ?

הגדרה: המכפלה $1\cdot2\cdot3\cdots n$ מסומנת על ידי $n!$ ונקראת **n עצרת**. נגדיר $0!=1$.

משפט: מספר התמורות של הקבוצה $\{1,2,3,\dots,n\}$ הוא $n!$.

דוגמאות:

1. 11 שחקנים רוצים להסתדר לצילום קבוצתי.
   בכמה אופנים הם יכולים להסתדר **בשורה** לפני הצלם ?
2. מהו מספר הפונקציות החח"ע מהקבוצה $\{1,2,3,\dots,n\}$ לעצמה ?
3. בכמה תמורות של 8 האותיות A,B,C,D,E,F,G,H
   האותיות G,H צמודות זו לזו?

תמורות עם חזרות

טענה: בהינתן n עצמים מ-k טיפוסים: n_1 מהטיפוס הראשון, n_2 מהטיפוס השני וכו' $(n=n_1+n_2+\dots+n_k)$, אזי מספר הסדרות של n עצמים אלה כאשר לא מבחינים בין עצמים מאותו טיפוס הוא

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

דוגמא:

- בכמה דרכים ניתן לסדר על מדף 5 עותקים זהים של "אלגברה", 7 עותקים זהים של "הסתברות" ו-4 עותקים זהים של "מתמטיקה בדידה"?

בחירה ללא חזרות כשהסדר חשוב - חליפות

משפט: תהי A קבוצה, $n=|A|$, ויהי $0 \le k \le n$. מספר הסדרות באורך k ללא חזרות שניתן לבנות מאברי A הוא:

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=n!/(n-k)!$$

דוגמאות:

1. כמה מילים בנות 4 אותיות ניתן לבנות מאותיות הא"ב האנגלי, כשאסור שבמילה אחת תופיע אותה אות יותר מפעם אחת ?
2. במשחה ל- 400 מטר מעורב מתמודדים 8 שחיינים. כמה רשימות זוכים במדליות אפשריות? (המדליות שמחולקות הן: זהב, כסף וערד)

בחירה ללא חזרות כשהסדר אינו חשוב - צרופים

משפט: תהי A קבוצה, $n=|A|$, ויהי $0 \le k \le n$. מספר התת-קבוצות של A בגודל k הוא $n!/[k!(n-k)!]$.

תהי $A=\{1,2,3,4,5\}$ ו-$k=3$. נסתכל על היחס שבין הסדרות השונות בת 3 איברים לעומת הקבוצות השונות בנות 3 איברים.

קבוצה	סדרות מתאימות
{1,2,3}	(1,2,3), (1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)
{1,2,4}	(1,2,4), (1,4,2),(2,1,4),(2,4,1),(4,1,2),(4,2,1)
{1,2,5}	(1,2,5), (1,5,2),(2,1,5),(2,5,1),(5,1,2),(5,2,1)
{1,3,4}	(1,3,4), (1,4,3),(3,1,4),(3,4,1),(4,1,3),(4,3,1)
{1,3,5}	(1,3,5), (1,5,3),(3,1,5),(3,5,1),(5,1,3),(5,3,1)
{1,4,5}	(1,4,5), (1,5,4),(4,1,5),(4,5,1),(5,1,4),(5,4,1)

{2,3,4}	(2,3,4), (2,4,3),(3,2,4),(3,4,2),(4,2,3),(4,3,2)
{2,3,5}	(2,3,5), (2,5,3),(3,2,5),(3,5,2),(5,2,3),(5,3,2)
{2,4,5}	(2,4,5), (2,5,4),(4,2,5),(4,5,2),(5,2,4),(5,4,2)
{3,4,5}	(3,4,5), (3,5,4),(4,3,5),(4,5,3),(5,3,4),(5,4,3)

<u>הגדרה</u>: המספר $n!/[k!(n-k)!]$, כאשר $0\le k\le n$, נקרא **מקדם בינומי** ומסומן על ידי

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

<u>דוגמאות</u>:

1. בכמה דרכים אפשר למלא טופס לוטו ?
(בטופס לוטו יש לבחור 6 מספרים כלשהם מתוך המספרים {1,2,3,...,45})
2. בכיתה יש ~~4~~ 3 בנות ו-9 בנים. בכמה דרכים אפשר לבחור ועד מתוך ילדי הכיתה שיכלול שתי בנות ושלוש בנים ?
3. 11 שחקנים של קבוצת כדורגל רוצים להצטלם בשתי שורות, כאשר 6 שחקנים עומדים מאחור ו-5 שחקנים מלפנים, ובנוסף השוער צריך לעמוד במרכזה של השורה הקדמית.
בכמה אופנים הם יכולים להסתדר כעת לפני הצלם ?

<u>טענה</u>: מספר הסדרות הבנויות מ-s אחדים ו-t אפסים הוא

$$\binom{s+t}{s}$$

<u>**בחירה עם חזרות כשהסדר אינו חשוב - צרופים עם חזרות**</u>

<u>משפט</u>: תהי A קבוצה, $n=|A|$. מספר הדרכים לבחור k איברים מתוך אברי A כשמותרות חזרות בבחירה והסדר אינו חשוב, הוא

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

דוגמאות:

1. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש למשוואה $x_1+x_2+\ldots+x_n=k$?
2. כמה פתרונות שלמים אי-שליליים יש לאי-שוויון $x_1+x_2+\ldots+x_n\leq k$?
3. במכללה כלשהי לומדים לתואר במדעי המחשב במשך ארבע שנים.
   א. בכמה דרכים אפשר לבחור ועד של 10 תלמידים לייצוג תלמידי מדעי המחשב, כאשר מה שחשוב הוא כמה נציגים נבחרו מכל מחזור ולא אלו תלמידים נבחרו ?
   ב. בכמה דרכים אפשר לבחור את הוועד כך שייבחר לפחות תלמיד אחד משנה א', לפחות תלמיד אחד משנה ב', לפחות שני תלמידים משנה ג' ולפחות שני תלמידים משנה ד'.
4. בכמה דרכים ניתן לחלק k כדורים זהים ל-t תאים כך שבכל תא לפחות כדור אחד ?
5. בכמה דרכים ניתן לחלק 40 כדורים זהים ל-3 תאים כך שבתא הראשון יהיו לפחות 10 כדורים ?
6. בכמה דרכים ניתן לחלק 300 כדורים זהים ל-3 תאים כך שבכל תא יהיו לא יותר מ-180 כדורים ?
7. נתון מאגר בלתי מוגבל של כדורים בשלושה צבעים. כמה קבוצות שונות של 300 כדורים ניתן ליצור מהם ?
8. נתון מאגר בלתי מוגבל של כדורים בשלושה צבעים. כמה קבוצות שונות של 300 כדורים לכל היותר ניתן ליצור מהם ?
9. בכמה דרכים ניתן לחלק n כדורים לבנים (זהים) n כדורים צבעונים (ב-n צבעים שונים) ל-$2n$ תאים כך שבכל תא יהיה:
   a. לכל היותר כדור אחד.
   b. לכל היותר כדור לבן אחד (אך יתכנו מספר צבעונים).
   c. לכל היותר כדור צבעוני אחד (אך יתכנו מספר לבנים).
   d. מספר שווה של כדורים צבעונים וכדורים לבנים.

סיכום:

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר		
אין חשיבות לסדר		

סידורים עם סימטריות

דוגמא: בכמה דרכים ניתן לסדר n עצמים במעגל, כאשר סידורים המתקבלים זה מזה על ידי סיבוב נחשבים זהים ?

דוגמא:

- נתונים r צבעים וקרוסלה ועליה k סוסי עץ זהים. בכמה דרכים ניתן לצבוע את הסוסים, כאשר דרכים המתקבלות זו מזו על ידי סיבוב נחשבות זהות, עבור הערכים הבאים של k:
  - 7
  - 9
  - 15

קומבינטוריקה (המשך)

עקרון ההכלה וההדחה

<u>תזכורת</u>: תהיינה A,B שתי קבוצות סופיות אזי

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

<u>דוגמאות</u>:

1. בכיתה מסוימת לומדים 15 סטודנטים אלגברה, 12 לומדים מתמטיקה בדידה ו-9 לומדים את שני הקורסים. כמה סטודנטים לומדים לפחות את אחד משני קורסים ?

2. כמה מספרים שונים אפשר ליצור מהספרות 1,2,3,4 כך שכל ספרה תופיע בדיוק פעם אחת והמספר יהיה זוגי או גדול מ- 2000.

<u>הערה</u>: יהי U עולם סופי, תהיינה A,B שתי תת קבוצות סופיות של U אזי

$$|\bar{A}\cap\bar{B}|=|U|-|A|-|B|+|A\cap B|$$

<u>דוגמאות</u>:

1. בכיתה מסוימת לומדים 60 סטודנטים. 30 לומדים אלגברה, 20 לומדים מתמטיקה בדידה ו- 8 לומדים את שני הקורסים. כמה סטודנטים לא לומדים אף אחד משני הקורסים ?

2. כמה מספרים בין 1ל-300 אינם מתחלקים לא ב-3 <u>ו</u>לא ב-5.
וגם

<u>שאלה</u>: כיצד נחשב את האיחוד של שלוש קבוצות סופיות A,B,C שאינן בהכרח זרות ?

דוגמאות:

1. כל תלמיד שנה א' לומד לפחות אחד משלוש הקורסים הבאים – מחשבים, אנגלית ומתמטיקה. רישום התלמידים לקורסים נעשה על פי הטבלה הבאה:

שמות הקורסים	מספר התלמידים הרשומים
מחשבים	25
אנגלית	20
מתמטיקה	33
מחשבים ואנגלית	15
מחשבים ומתמטיקה	25
אנגלית ומתמטיקה	20
מחשבים, אנגלית ומתמטיקה	15

כמה תלמידים יש בסה"כ בשנה א' ?

2. כמה מספרים שלמים חיוביים הקטנים מ- 30 זרים ל- 30.

3. בכמה דרכים ניתן לחלק 60 כדורים זהים ל-3 תאים כך שבאף תא לא יהיה יותר מ-25 כדורים ?

4. בכמה דרכים ניתן לסדר בשורה את המספרים $1,2,\ldots,9$ כך שלא נמצאים זה לצד זה אף אחד מהזוגות: $1,2;\ \ 3,4;\ \ 5,6$

משפט(נוסחת ההכלה וההדחה): בהינתן עולם סופי U ותת קבוצות שלו $A_1,A_2,\ldots,A_r$ מתקיים,

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_r|=\sum_{i=1}^{r}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le r}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\le i<j<k\le r}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^r|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_r|$$

מסקנה: בהינתן עולם סופי U ותת קבוצות שלו $A_1,A_2,\ldots,A_r$ מתקיים,

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_r}|=|U|-\sum_{i=1}^{r}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le r}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le r}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^r|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_r|$$

דוגמאות:

1. מטילים 10 קוביות בו זמנית. כמה תוצאות הטלה שונות אפשריות בהן מופיעים כל המספרים 1 עד 6 ?

2. נתונה חפיסה של 52 קלפים. בכמה דרכים אפשר לבחור במשחק ברידג' "יד" שכוללת לפחות מלך אחד, מלכה אחת, נסיך אחד ואס אחד ? ("יד" בברידג' היא בחירה של 13 קלפים מתוך 52 הקלפים שבחבילה, בכל חפיסת קלפים יש 4 קלפים מכל סוג.

3. כמה פונקציות על יש מקבוצה B בגודל n על קבוצה בת r איברים $\{y_1,\dots y_r\}$?

נסתכל על מקרה פרטי של דוגמא 3 עבור $n=r$ ונקבל:

מסקנה (זהות אוילר): מספר הפונקציות מקבוצה בת n איברים על קבוצה בת n איברים הוא $n!$, לכן מתקבלת הזהות,

$$n!=n^n-n(n-1)^n+\binom{n}{2}(n-2)^n-\cdots$$

אי סדר מלא.

הגדרה: תמורה של n מספרים $1,2,\dots,n$ נקראת **אי סדר מלא**, אם כל מספר אינו נמצא במקומו.

דוגמא:

- התמורה הבאה היא אי סדר מלא:

1 2 3 4 5 6
2 3 4 5 6 1

- התמורה הבאה אינה אי סדר מלא:

1 2 3 4 5 6
2 4 3 1 6 5

הערה: עקרון ההכלה וההפרדה מאפשר למצוא מהו מספר התמורות שהן אי-סדר מלא.

כיצד ?

נסמן ב-A_i את קבוצת התמורות, שבהן המספר i נשאר במקומו. $A_i=(n-1)!$.
ולכן, $|A_i \cap A_j|=(n-2)!$.
באופן דומה, $|A_i \cap A_j \cap A_k|=(n-3)!$ וכו'
קבוצת התמורות, שהן אי סדר מלא היא:

$$|\overline{A_2} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{An}|$$

ומספר האיברים בקבוצה זאת בהתאם לעקרון ההכלה וההפרדה, הוא:

$$n!-n(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\binom{n}{3}(n-3)!+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}1$$

אבל-

$$\binom{n}{k}(n-k)!=\frac{n!}{k!(n-k)!}(n-k)!=\frac{n!}{k!}$$

לכן המספר המבוקש הוא:

$$n!(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!})$$

עבור n גדול, הביטוי בסוגריים קרוב מאוד ל-e^{-1}, מקבלים כקירוב למספר התמורות של n איברים, שהן אי-סדר מלא:

$$\frac{n!}{e} \sim 0.37n!$$

דוגמא:

מזכירה שמה n מכתבים ב-n מעטפות ממוענות. מהו מספר האפשריות שאף מכתב לא יהיה במעטפה המתאימה ?

קומבינטוריקה (המשך)

הבינום של ניוטון ומשולש פסקל

משפט(נוסחת הבינום של ניוטון): יהיו $a,b\in R$ ויהי $n\in N$. אז,

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

הערה: נוכיח זהויות קומבינטוריות הקשורות למקדמים הבינומים. ההוכחות ייעשו בשני אופנים:

- הוכחה אלגברית: הוכחה שבה מוכחים את הזהות על ידי פעולות אלגבריות בלבד.
- הוכחות קומבינטריות: הוכחת הזהות על ידי מתן המשמעות הקמבונטריות לביטויים המופעים בזהות.

משפט: יהי $n\in N$. אזי

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

משפט: יהיו $n,k\in N$ כאשר $0\le k\le n$. אזי

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

זהות פסקל ומשולש פסקל

משפט (זהות פסקל): יהיו $n,k\in N$ כאשר $0\le k\le n$. אז

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$

<u>משולש פסקל</u>: בעזרת זהות פסקל ניתן לחשב משולש הידוע בשם משולש פסקל. זהו כלי המאפשר לחשב את המקדמים הבינומיים בדרך קלה ורקורסבית.

- בקודקוד העליון של המשולש יהיה המקדם הבינומי

$$\binom{0}{0}=1$$

- בכל שורה אחרת האיבר השמאלי ביותר יהיה המקדם הבינומי

$$\binom{n}{0}=1$$

- האיבר הימני ביותר יהיה המקדם הבינומי

$$\binom{n}{n}=1$$

- כל איבר אחר במשולש הוא סכום של שני המקדמים שנמצאים בשורה מעליו משני צדדו.

<u>דוגמא:</u>

- חמש שורות ראשונות במשולש פסקל:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

- אם נמספר את השורות ב-$0,1,2,\ldots$ החל מהשורה העליונה, אז בשורה ה-n במשולש נמצאים המקדמים של הביטוי $(a+b)^n$.

- לדוגמאן, אם נרצה לחשב את הביטוי $(a+b)^4$ נתבונן בשורה הרביעית במשולש פסקל ונקבל תוך שימוש בנוסחת הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

<u>משפט</u>: יהיו $n,k\in N$ כאשר $0\le k\le n$. אזי

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

<u>משפט</u>: יהיו $n,k\in N$ כאשר $0\le k\le n$. אזי

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

דיסקרטית - שיעור 10:

אינדוקציה מלאה:

מתחילים עם אינדוקציה רגילה ואם לא מצליחים עוברים למלאה.

טענה: לכל $n \geq 0$ טבעי...

הוכחה: באינדוקציה מלאה על n

בסיס האינדוקציה:

שלב האינדוקציה: נניח שהטענה נכונה עבור $0,1,2,\dots,n-1$ (לכל $n\geq 1$)

צ"ל הטענה נכונה עבור n (לכל $n \geq 0$)

דוגמא:

טענה: כל מספר טבעי מ-2 ומעלה ניתן להציג כמכפלה של ראשונים.

$18 = 2\cdot 3\cdot 3$

הוכחה:

צ"ל: n ($n \geq 2$) ניתן להציג כמכפלה של ראשוניים.

בסיס אינדוקציה:

שלב האינדוקציה: נניח שהמספרים $2,3,4,\dots,n-1$ עבור $n\geq 3$, ניתנים להציג כמכפלה של ראשונים.

נפריד למקרים:

א. אם n ראשוני אז n הוא מכפלה באורך 1 של ראשוניים.

ב. אם n לא ראשוני אז קיים k,l טבעיים כך ש- $n=k\cdot l$

$2\leq k\leq n-1$
$2\leq l\leq n-1$

$\frac{n}{k}=l$

לפי הנחת האינדוקציה עבור k קיים $p_1,p_2,\dots,p_s$ ראשוניים כך ש-

$k=p_1\cdot p_2\cdots p_s$

לפי הנחת האינדוקציה עבור l קיים $q_1,q_2,\dots,q_t$ ראשוניים כך ש-

$l=q_1,q_2,\dots,q_t$

$n=k\cdot l=p_1\cdot p_2\cdots p_s\cdot q_1\cdot q_2\cdots q_t$

קומבינטוריקה:

A, B, C

ב. $26 \cdot 26$

ג. $26 \cdot 25$

יותר קל להתחיל מפה.

9 אופציות $\cdot$ 5 אופציות $= 45$

+

זוגי

$5 \cdot 5$

אי זוגי

$5 \cdot 4$

$25 + 20 = 45$

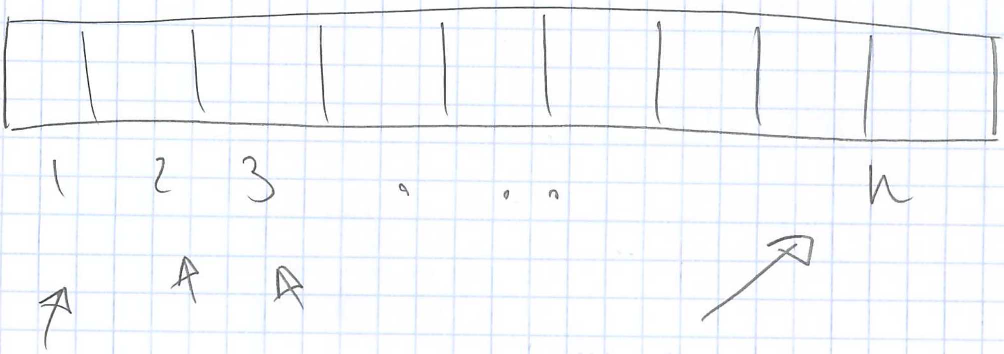
A

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	...	a_n
0	1	0	0	1	0	...	0

$f((a_2, a_5)) = 010010...0$

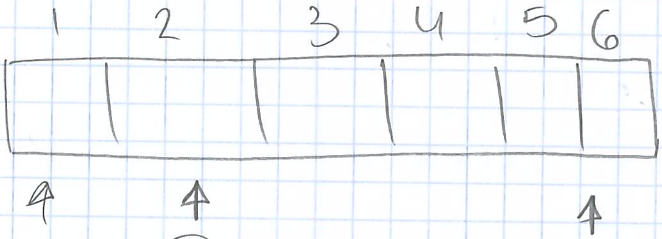
$f: P(A) \to$ מחרוזת בינארית באורך n

.2

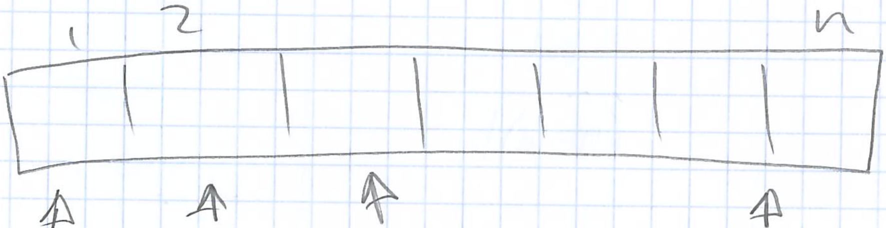


$$2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2 = 2^n$$

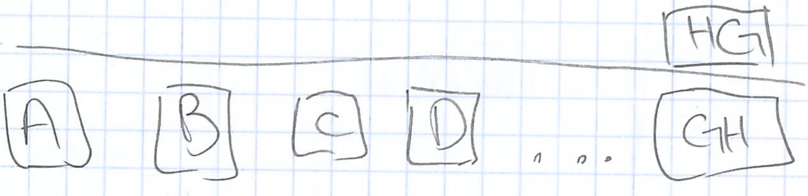
3.ב.



$$9\cdot 9\cdot \ldots \cdot 9 = 9^6$$



$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$$



$$7!+7!=2\cdot 7!$$

ר' 1 4

מבנה 1

אופי 2

$$\frac{4!}{2}$$

ב' 7   20

מבנה 10

עינ' 3

$$\frac{20!}{7!\cdot 10!\cdot 3!}$$

בוחרים k איברים מתוך n איברים (שונים)

	אסורות חזרות	מותרות חזרות
יש חשיבות לסדר הבחירה	$n\cdot(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
אין חשיבות לסדר הבחירה	$\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$	

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$\binom{4}{2}\cdot\binom{9}{3}$$